25.05.2004

Wie lost man ein LCP?
Naiver Algorithmus:

1. Rate $supp(\alpha)$ und $supp(\beta)$.
   (z.B. durch vollständige Aufzählung aller $2^n \cdot 2^m$ Möglichkeiten)

2. Konvertiere LCP in ein lineares Programm.
   (1), (2), (5), (6) $\rightsquigarrow$ sind bereits lineare Constraints
   (3) für $\alpha(a_i)(u - U_1(a_i, \beta)) = 0$:

   - falls $a_i \in supp(\alpha)$: neuer linearer Constraint $u - U_1(a_i, \beta) = 0$
   - sonst: neuer linearer Constraint $\alpha(a_i) = 0$

   (4) genauso wie bei (3)

   Optimierungsfunktion: 0

   (Anm: Wir benöetigen eine beliebige, von den Constraints unabhängige Optimierungsfunktion, da die Kriterien, die optimiert werden sollen, bereits in den Constraints stehen.)

3. Verwende LP-Solver

Laufzeit: $O(p(n + m) \cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist.

Besser: Lemke-Howson-Algorithmus

Frage: $LCP \in P$? Dies ist ein offenes Problem, aber es liegt auf jeden Fall in NP.

3.3. Evolutionäre Gleichgewichte

Idee:

- Spieler sind biologische Organismen, die derselben Art angehören
- Den Organismen stehen verschiedene Strategien zur Verfügung.
- Die Aktionsauswahl wird durch „Natur“ (Vererbung, Mutation) getroffen.
- Der Nutzen entspricht den Überlebenschancen.

Frage: Gibt es Strategien, die „evolutionär stabil“ sind, d.h. ein stabiles Gleichgewicht in der Population herstellen, in dem Mutationen „unattraktiv“ sind?

Modellierung:

- Wir betrachten nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1, 2\}$.
- Die Individuen gehören derselben Art an, daraus folgt, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ ($\rightsquigarrow u_1 = \mathbf{u}$)
- Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.
- Eine Strategie $b^* \in B$ (Anm: b statt a für Aktion in diesem Abschnitt. (b)ehavior) ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\epsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in B \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

$$(1 - \epsilon)u(b, b^*) + \epsilon u(b, b) < (1 - \epsilon)u(b^*, b^*) + \epsilon u(b^*, b)$$

für kleines ϵ äquivalent:

$$u(b, b^*) < u(b^*, b^*)$$

oder

$$u(b, b^*) = u(b^*, b^*) \text{ und } u(b, b) < u(b^*, b)$$

Definition 1 (symmetrische strategische Spiele):
Ein strategisches Spiel $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt.

$B := A_1$ $(= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G,

$u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.

Definition 2:
Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls gilt

- (b^*, b^*) ist ein Nash-Gleichgewicht von G und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$:

$$u(b, b) < u(b^*, b).$$

Beispiel (Falke oder Taube):

mit reellem Parameter $c \geq 0$ (für Verlust bei einem Kampf)

	T	F
T	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 0
F	0 1	$\frac{1}{2}(1-c)$ $\frac{1}{2}(1-c)$

$c < 1$: (F, F) einziges Nash-Gleichgewicht.
$\rightsquigarrow$ strikt dominante Strategie
$\rightsquigarrow$ es gibt keine weitere Beste Antwort
$\rightsquigarrow$ F evolutionär stabil
$c = 1$: Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien (T, F), (F, T), (F, F)
Betrachte (F, F) (Anm: beide Spieler müssen sich gleich verhalten) beste Antwort T:
$u(T, T) = \frac{1}{2} < u(F, T) = 1$
$\rightsquigarrow$ evolutionär stabil
$c > 1$ Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien(T, F), (F, T)
gemischt $(\underbrace{\{T \mapsto 1 - \frac{1}{c}, F \mapsto \frac{1}{c}\}}_{b^*}, \underbrace{\{T \mapsto 1 - \frac{1}{c}, F \mapsto \frac{1}{c}\}}_{b^*})$
Beste Antworten: Betrachte T, F
b=T: $u(b, b) = \frac{1}{2}$
$u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \cdot 1 > \frac{1}{2}$ ✓
b=F: $u(b, b) = \frac{1}{2}(1 - c)$
$u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot 0 + \frac{1}{c}\frac{1}{2})(1 - 2) > \frac{1}{2}(1 - c)$ ✓
$\rightsquigarrow$ b^* ist evolutionär stabil.

Anmerkung: Hier haben wir nur **reine** Strategien als abweichende beste Antworten b betrachtet. Bei Spielen mit zwei Aktionen ist die auch ausreichend (ohne Beweis), ab drei Aktionen müssen aber unter Umständen auch gemischte Strategien berücksichtigt werden.