21.05.2004

(Anm: Erinnerung: Lösen von Nullsummenspielen durch lineare Programme.
Für jedes α von Spieler 1 bestimme schlimmste Antwort des Gegners, dann maximiere darüber

$$U_1(\alpha, b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) \cdot u_1(a_i, b_j) \geq u \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n$$

Maximiere u!

Für β entsprechend.

Wegen: Maximin = Minimax für Nullsummenspiele, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen:

$$U_1(a_i, \beta) \leq u \qquad \forall i: \ 1 \leq i \leq m$$

Minimiere U.

Für β entsprechend.

Mit $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$)

3.2. Algorithmen für allgemeine Zweipersonenspiele

Für allgemeine Spiele funktioniert die LP-Methode nicht.
Stattdessen **LCP** (**Linear complementarity problem**):
Lineare Constraints und einen Typ zusätzlicher Bedingungen. Zwei Gruppen von Variablen $\{x_1, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, \ldots, y_k\}$

mit Constraints: $x_i \cdot y_i = 0 \quad \forall i: \ 1 \leq i \leq k$
oder äquivalent

$$x_i = 0 \vee y_i = 0$$

und keine Optimierungsbedingung.
Damit sind Nash-Gleichgewichte für beliebige zwei Personenspiel beschreibbar.
Seien (u, v) die Auszahlungen im gemischten Nash-Gleichgewicht (α, β)
Dann muß gelten:

(1) $u - U_1(a_i, \beta) \geq 0 \quad \forall i: \ 1 \leq i \leq m$

(2) $v - U_2(\alpha, b_j) \geq 0 \quad \forall j: \ 1 \leq i \leq n$

(3) Weiter muß gelten:

$$\underbrace{\alpha(a_i)} \cdot \underbrace{(u - U_1(a_i, \beta))} = 0 \quad \forall i$$

   (a) $\alpha(a_i) = 0$ gilt, falls a_i nicht im Support der Gleichgewichtsstrategie

   (b) $u - U_1(a_i, \beta) = 0$ gilt, falls a_i eine beste Antwort auf β ist (wegen (1))

   $\rightsquigarrow$ gilt, falls a_i im Support der Gleichgewichtsstrategie ist.

   [Kann in LCP-Normalform umgeformt werden, mit zusätzlichen Variablen.]

(4) $\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) = 0 \quad \forall j$

(5) $\alpha(a_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) = 1$

(6) $\beta(b_j) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \beta(b_j) = 1$

Satz 1:
Ein Profil in gemischten Strategien (α, β) mit Auszahlung (u, v) ist Nash-Gleichgewicht gdw. eine Lösung des LCPs (1)-(6) (α, β), (u, v) ist.

Nash-Gleichgewicht $\Rightarrow$ “Lösung des LCPs” ✓

“LCP-Lösung” $\Rightarrow$ Nash-Gleichgewicht:

1. α, β sind gemischte Strategien folgt aus (5)+(6)
2. Wenn reine Strategie a_i gespielt wird ($\alpha(a_i) > 0$), dann ist die Auszahlung (als Reaktion auf β) u wegen (3).
3. u ist das Maximum aller möglichen reinen Antworten, wegen (1).
4. D.h. (α, β) sind beste Antworten aufeinander mit Auszahlung (u, v)

   $\rightsquigarrow$ Nash-Gleichgewicht.