11.05.2004

**Satz 2 (Satz von Nash):**
Jedes endliche strategische Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Beweisidee:

Betrachte mengenwertige Funktion (= Korrespondenz) der besten Antworten:

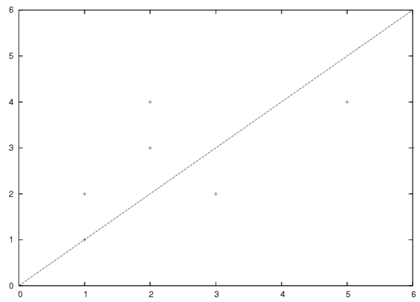
$$B: \ \mathbb{R}^{\sum_i |A_i|} \to 2^{\mathbb{R}^{\sum_i |A_i|}}$$

(Anm: $2^x$ Potenzmenge, Menge aller Teilmengen.)

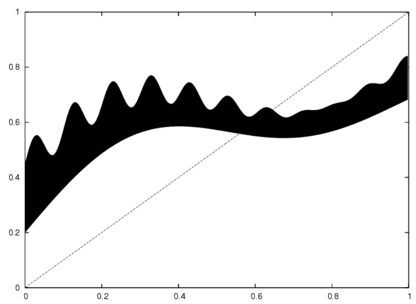
$$B(\alpha) = \bigtimes_{i \in N} B_i(\alpha_{-i})$$

$\alpha$ ist Fixpunkt der Korrespondenz $B$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \alpha \in B(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \text{ ist Nash-Gleichgewicht} \end{aligned}$$




Der Graph unserer Korrespondenz sollte „zusammenhängend“ sein.




Dann liegen Punkte auf der Fixpunktdiagonalen.

□

Erinnerung:

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **kompakt**, wenn

1. sie **beschränkt** ist, d.h. es gibt obere und untere Schranken
2. und wenn sie außerdem **abgeschlossen** ist, d.h. jede konvergente Folge von Elementen aus $X$ hat den Grenzwert in X.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **konvex**, wenn für $x, y \in X$ und beliebiges $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in X$$

Eine Korrespondenz $f : X \to 2^Y$ ist **ober-hemi-stetig**, falls ihr Graph

$$G(f) = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in f(x)\}$$

eine abgeschlossene Menge ist.

Eine Funktion $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist **quasi-konkav**, falls für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt:
die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq z\}$ ist konvex.

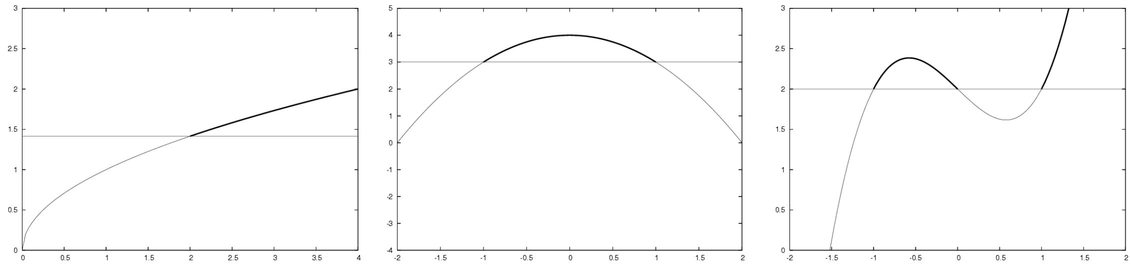


Abbildung 3.1: Die ersten beiden Graphen sind konvex, der dritte nicht.

**Satz 3 (Fixpunktsatz von Kakutani):**
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei außerdem $f:\ A \to 2^A$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so daß $f(x) \subseteq A$ eine nicht-leere, konvexe Menge für jedes $x \in A$ ist.
Dann hat $f$ einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in A$ mit $x \in f(x)$.

ohne Beweis.

Beweis:(des Satzes von Nash):
Zeige, daß der „Satz von Kakutani“ anwendbar ist.

(1) $\times_i \Delta(A_i)$ ist nicht-leer, konvex und kompakt.

(vgl. HA 3.2.1 **??**)

(2) $U_i$ ist für fixes $\alpha_{-i}$ linear in eigener gemischten Strategie, d.h. $\beta_i, \gamma_i \in \Delta(A_i)$ gilt:

$$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda) U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i) \qquad \text{für } \lambda \in [0,1] \quad (*)$$

(Anm: Mögliche Interpretation: Man spielt Metastrategie: mit Wahrscheinlichkeit $\lambda$ spielt man $\beta_i$ und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ spielt man $\gamma_i$)
Daraus folgt $U_i$ stetig in $\Delta(A_i)$.

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben ihr Maximum in der Menge.

$\Rightarrow B_i(\alpha_{-i})$ ist eine nicht-leere Menge. $B(\alpha)$ ist nicht leer.

(3) $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_i)$ konvex ist:

Sei $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.

$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'')$$

wegen (*) gilt dann auch

$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$$

(4) z.z.: $(\alpha^n, \beta^n)$ Folge in $Graph(B)$ mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$.
Dann $(\alpha, \beta) \in Graph(B)$.

Beweis:

Sei $\alpha^n,\ \beta^n,\ \alpha,\ \beta \in \bigtimes_{i\in N} \Delta(A_i)$
mit $\beta^n \in B(\alpha^n)$, $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$.

Dann gilt für alle $i \in N$:

$$
\begin{aligned}
u_i((\beta_i, \alpha_{-i})) &\overset{\text{Def. } \alpha,\ \beta}{=} u_i(\lim_{n\to\infty}(\beta_i^n, \alpha_{-i}^n)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} u_i((\beta_i^n, \alpha_{-i}^n)) \\
&\overset{\beta_i^n \text{ beste Antwort auf } \alpha_{-i}^n}{\geq} \lim_{n\to\infty} u_i((\beta_i', \alpha_{-i}^n)) \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} u_i((\beta_i', \lim_{n\to\infty} \alpha_{-i}^n)) \qquad \text{für alle } \beta_i' \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} u_i((\beta_i', \alpha_{-i}))
\end{aligned}
$$

$\hookrightarrow$ $\beta_i$ beste Antwort auf $\alpha_{-i}$ für alle $i \in N$

$\hookrightarrow$ $\beta \in B(\alpha)$

$\hookrightarrow$ $(\alpha, \beta) \in G(B)$.

□

□

**Satz 4 (Verallgemeinerung des Satzes von Nash):**
Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein strategisches Spiel, so dass für jedes $i \in N$

1. $A_i$ eine nicht-leere, konvexe und kompakte Menge ist und
2. $u_i$ stetig in $A$ und quasi-konkav in $A_i$ ist

Dann besitzt $G$ ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweisidee:

Ähnlich wie „Nash“, Quasi-Konkavität von $u_i$ impliziert Konvexität der Antwortmenge.

□