04.05.2004

Beweis:

(a) Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

$$\begin{array}{rrcll} \Rightarrow & u_2(x^*,y^*) & \geq & u_2(x^*,y) & \text{für alle } y \in A_2 \\ \overset{u_1=-u_2}{\Rightarrow} & u_1(x^*,y^*) & \leq & u_1(x^*,y) & \text{für alle } y \in A_2 \\ \Rightarrow & u_1(x^*,y^*) & = & \min_{y\in A_2} u_1(x^*,y) & \\ & & \leq & \max_{x\in A_1} \min_{y\in A_2} u_1(x,y) & (+) \end{array}$$

Außerdem:

$$\begin{array}{rcll} u_1(x^*,y^*) & \geq & u_1(x,y^*) & \text{für alle } x \in A_1 \\ \Rightarrow u_1(x^*,y^*) & \geq & \min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) & \text{für alle } x \in A_1 \quad (++) \\ \Rightarrow u_1(x^*,y^*) & \geq & \max\limits_{x\in A_1} \min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) & (+++) \\ (+),(+++) \Rightarrow u_1(x^*,y^*) & = & \max\limits_{x\in A_1} \min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) & (++++) \end{array}$$

$\Rightarrow x^*$ ist Maximinimierer.

Analog für Spieler 2:

$$\begin{array}{rcl} u_2(x^*,y^*) & = & \max\limits_{y\in A_2} \min\limits_{x\in A_1} u_2(x,y) \\ u_2(x^*,y^*) & = & \max\limits_{x\in A_1} u_2(x,y^*) \end{array}$$

$\Rightarrow y^*$ ist Maximinimierer.
Daraus folgt a)

(b)

$$\begin{array}{rcl} u_2(x^*,y^*) & \overset{\text{Lemma}}{=} & -\min\limits_{y\in A_2} \max\limits_{x\in A_1} u_1(x,y) \\ \Rightarrow u_1(x^*,y^*) & = & \min\limits_{y\in A_2} \max\limits_{x\in A_1} u_1(x,y) \\ & \overset{(++++)}{=} & \max\limits_{x\in A_1} \min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) \end{array}$$

Daraus folgt b)

(Anm: Daraus folgt insbesondere auch, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben)

(c)

$$\begin{array}{rcl} v^* & := & \max\limits_{x\in A_1} \min\limits_{y\in A_2} u_1(x,y) = \min\limits_{y\in A_2} \max\limits_{x\in A_1} u_1(x,y) \\ \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} -v^* & = & \max\limits_{y\in A_2} \min\limits_{x\in A_1} u_2(x,y) \end{array}$$

Da x^* Maximinimierer: $u_1(x^*,y) \geq v^*$ f.a. $y \in A_2$ $\boxdot$

Da y^* Maximinimierer: $u_2(x,y^*) \geq -v^*$ f.a. $x \in A_1$ $\odot$

$$\overset{\text{Setze } x=x^*,\ y=y^*}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{rcr} u_1(x^*,y^*) & \geq & v^* \\ u_2(x^*,y^*) & \geq & -v^* \\ \Rightarrow u_1(x^*,y^*) & \leq & v^* \end{array}\right\} u_1(x^*,y^*) = v^*$$

$$\text{wegen } \boxdot \quad \begin{array}{rcll} u_1(x^*,y) & \geq & u_1(x^*,y^*) & \text{für alle } y \in A_2 \\ u_2(x^*,y) & \leq & u_2(x^*,y^*) & \text{für alle } y \in A_2 \end{array}$$

$\Rightarrow y^*$ beste Antwort auf x^*.

$$\text{wegen } \odot \;\; u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

$\Rightarrow x^*$ beste Antwort auf y^*

$\Rightarrow (x^*, y^*)$ ist Nash-Gleichgewicht.

(Anm: Insgesamt folgt, wenn es mehrere NG gibt, so kann man sich immer eines aussuchen.)

(Anm: Strikt kompetitive Spiele sind im Wesentlichen für Brettspiele interessant, jedoch nicht für die Wirtschaft.)

$\square$

Kapitel 3

Gemischte und korrelierte Strategien

Motivation: Was tun bei Nicht-Existenz von Nash-Gleichgewichten?

$\rightsquigarrow$ randomisierte Strategien!

Notation:

$\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ Spiel.

- $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge A_i

  „gemischte Strategien“ $\alpha_i \in \Delta(A_i)$

  $\alpha_i(a_i)$ Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$

- Ein Profil $(\alpha_i)_{i \in N} \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$ induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $A = \times_{i \in N} A_i$ wie folgt:

$$p(a) = \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$$

  Für $A' \subseteq A = \times_{i \in N} A_i$:

$$p(A') = \sum_{a \in A'} p(a) = \sum_{a \in A'} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$$

Beispiel:

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	$1, -1$	$-1, 1$
	Zahl	$-1, 1$	$1, -1$

Abbildung 3.1: Matching Pennies

Für Spieler 1 betrachte die gemischte Strategie: $\alpha_1 \in \Delta(\{K, Z\})$

$$\alpha_1(K) = \frac{2}{3},\ \alpha_1(Z) = \frac{1}{3}$$

Für Spieler 2 betrachte die gemischte Strategie: $\alpha_2 \in \Delta(\{K, Z\})$

$$\alpha_2(K) = \frac{1}{3},\ \alpha_2(Z) = \frac{2}{3}$$

$$p(K,K) = \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(K) = \frac{2}{9} \xrightarrow{u_1} +1$$

$$p(K,Z) = \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{4}{9} \to -1$$

$$p(Z,K) = \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(K) = \frac{1}{9} \to -1$$

$$p(Z,Z) = \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{2}{9} \to +1$$

<u>Notation:</u> „erwarteter Nutzen“

$$U_i(\alpha) = U_i((\alpha_j)_{j \in N}) := \sum_{a \in A} \underbrace{\left(\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j) \right)}_{=p(a)} u_i(a)$$

Im Beispiel:

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{9}$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{9}$$

<u>Notation:</u> Sei α_i eine gemischte Strategie. Die **Unterstützungsmenge** (**support**) von α_i ist die Menge

$$supp(\alpha_i) = \{a_i \in A_i | \alpha_i(a_i) > 0\}$$

Definition 3 (gemischte Erweiterung):
Die **gemischte Erweiterung** eines strategischen Spiels $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ist das Spiel $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i) \rangle$, in dem $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Aktionen A_i ist und U_i der erwartete Nutzen über α_i, $U_i : \times_{j \in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ jedem $\alpha \in \times \Delta_{j \in N}(A_j)$ den erwarteten Nutzen für Spieler i unter der von α induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung (der erwartete Nutzen von α) zuordnet.

Definition 4 (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien):
Sei G ein strategisches Spiel. Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von G ist ein Nash-Gleichgewicht der gemischten Erweiterung von G.