30.04.2004

2.3. Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 1 (Strikt kompetitive oder Nullsummen-Spiele):
Strikt kompetitive oder **Nullsummen-Spiele** sind strategische Spiele $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$, mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A$$

Beispiel:

1. Matching Pennies

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	1, -1	-1, 1
	Zahl	-1, 1	1, -1

Abbildung 2.1: Matching Pennies

2.

	L	M	R
T	8, -8	3, -3	-6, 6
M	2, -2	-1, 1	3, -3
B	-6, 6	4, -4	8, -8

(Anm: kein Nash-Gleichgewicht, alles was mir nutzt, schadet dem anderen und vice versa. Versuche eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme jeweils z.B. für Spieler 1 Zeilenminimum $\Rightarrow [-6; -1; -6]$ also entscheidet sich dann der Rationale/Paranoide für M. Maximiere über Minimum. Für Spieler 2 erhält man $[-8-4-8]$. Dies ist ok für Paranoiker/Pessimisten, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt.... Also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.)

Definition 2 (Maximinimierer):
Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Die Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G, falls

$$\min_{y\in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x, y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x\in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x\in A_1} u_2(x, y) \qquad \text{für alle } y \in A_2$$

(Anm: Bei unendlichen Spielen statt Maximum bzw. Minimum Supremum bzw. Infimum)

Bemerkung 1:
Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Maximin-Kombination.
$\leadsto$ Was zu beweisen ist.

Lemma 1:
Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel, so gilt:

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y) = -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y)$$

<u>Beweis:</u>

Es gilt für beliebiges $f: \bullet \to \mathbb{R}$

$$f: \min_z(-f(z)) = -\max_z(f(z)) \qquad (*)$$

Damit für alle $y \in A_2$:

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x,y) &\overset{*}{=} \max_{x \in A_1}(-u_2(x,y)) \\ &= \max_{x \in A_1}(u_1(x,y)) \qquad (**) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y) &\overset{*}{=} -\min_{y \in A_2} -[\min_{x \in A_1} u_2(x,y)] \\ &\overset{**}{=} -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y) \end{aligned}$$

□

Satz 1:
Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:

(a) Falls (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.

(b) Falls, (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*, y^*)$$

(c) Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw Spieler 2 sind, dann ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.