30.04.2004

## 2.3. Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

**Definition 1 (Strikt kompetitive oder Nullsummen-Spiele):**
**Strikt kompetitive** oder **Nullsummen-Spiele** sind strategische Spiele $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$, mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A$$

Beispiel:

1. Matching Pennies

| | | Spieler 2 | |
|---|---|---|---|
| | | Kopf | Zahl |
| Spieler 1 | Kopf | $-1$<br>$1$ | $1$<br>$-1$ |
| | Zahl | $1$<br>$-1$ | $-1$<br>$1$ |

Abbildung 2.1: Matching Pennies

2.

| | L | M | R |
|---|---|---|---|
| T | $-8$<br>$8$ | $-3$<br>$3$ | $6$<br>$-6$ |
| M | $-2$<br>$2$ | $1$<br>$-1$ | $-3$<br>$3$ |
| B | $6$<br>$-6$ | $-4$<br>$4$ | $-8$<br>$8$ |

(Anm: kein Nash-Gleichgewicht, alles was mir nutzt, schadet dem anderen und vice versa. Versuche eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme jeweils z.B. für Spieler 1 Zeilenminimum $\Rightarrow [-6;-1;-6]$ also entscheidet sich dann der Rationale/Paranoide für M. Maximiere über Minimum. Für Spieler 2 erhält man $[-8-4-8]$. Dies ist ok für Paranoiker/Pessimisten, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt.... Also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.)

**Definition 2 (Maximinimierer):**
Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Die Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in $G$, falls

$$\min_{y\in A_2} u_1(x^*,y) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in $G$ falls

$$\min_{x\in A_1} u_2(x,y^*) \geq \min_{x\in A_1} u_2(x,y) \qquad \text{für alle } y \in A_2$$

(Anm: Bei unendlichen Spielen statt Maximum bzw. Minimum Supremum bzw. Infimum)

**Bemerkung 1:**
Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Maximin-Kombination.
$\rightsquigarrow$ Was zu beweisen ist.

**Lemma 1:**
Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel, so gilt:

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y) = -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y)$$

Beweis:

Es gilt für beliebiges $f : \bullet \to \mathbb{R}$

$$f : \min_z(-f(z)) = -\max_z(f(z)) \qquad (*)$$

Damit für alle $y \in A_2$:

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x,y) &\overset{*}{=} \max_{x \in A_1}(-u_2(x,y)) \\ &= \max_{x \in A_1}(u_1(x,y)) \qquad (**) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y) &\overset{*}{=} -\min_{y \in A_2} -[\min_{x \in A_1} u_2(x,y)] \\ &\overset{**}{=} -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y) \end{aligned}$$

□

**Satz 1:**
Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:

(a) Falls $(x^*, y^*)$ ein Nash-Gleichgewicht von $G$ ist, dann sind $x^*$ und $y^*$ Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.

(b) Falls, $(x^*, y^*)$ ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*, y^*)$$

(c) Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und $x^*$ und $y^*$ Maximinimierer von Spieler 1 bzw Spieler 2 sind, dann ist $(x^*, y^*)$ ein Nash-Gleichgewicht.