27.04.2004

2.2. Nash-Gleichgewichte

Das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie:
Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

<u>Beispiel:</u>

		Strawinsky-Fan	
		Bach	Strawinsky
Bach-Fan	Bach	1 2	0 0
	Strawinsky	0 0	2 1

Abbildung 2.1: Bach oder Strawinsky

zwei Nashgleichgewichte

Definition 1 (Nash-Gleichgewichte):
Ein **Nash-Gleichgewicht** (**NG**) eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i$$

Definition 2 (Alternative: Nash-Gleichgewicht):
Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die die beste Reaktion auf a_{-i} sind:

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i | u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i),\ \text{für alle } a'_i \in A_i\}$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}) \qquad \text{für alle } i \in N$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \bigtimes_{i \in N} B_i(a^*_{-i})$$

Mit dieser Notation ist α^* ein Nash-Gleichgewicht gdw. $\alpha^* \in B(\alpha^*)$.

		Spieler 2	
		S	G
Spieler 1	S	3 3	4 0
	G	0 4	**1** **1**

Abbildung 2.2: Gefangenendilema, Ein Nash-Gleichgewicht

		Spieler 2	
		Falke	Taube
Spieler 1	Falke	**3** **3**	4 1
	Taube	1 4	0 0

Abbildung 2.3: Falke und Taube, ein Nash-Gleichgewicht

Spieler 1 \ Spieler 2	Kopf	Zahl
Kopf	1, -1	-1, 1
Zahl	-1, 1	1, -1

Abbildung 2.4: Matching Pennies. Kein Nash-Gleichgewicht.

Beispiel (Auktionsspiel):

Ein Objekt soll an einen der Spieler für eine Bezahlung abgegeben werden. Die Spieler haben Wertvorstellungen über das Objekt der Art $v_1 > v_2 > \ldots > v_{|N|} > 0$. Es wird verdeckt geboten. Es erhält derjenige den Zuschlag, der das höchste Gebot abgegeben hat, wobei bei gleichen Geboten der Spieler mit dem niedrigeren Index gewinnt. Der Gewinner zahlt den höchsten gebotenen Preis: „**first-price sealed-bid auction**“

Spiel: $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$
N: Bieter
A_i: Gebote $b_i \in \mathbb{R}_0^+$
u_i: $u_i(b_{-i}, b_i) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{falls } i \text{ gewonnen hat} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
daraus folgt, niemand würde mehr zahlen, als ihm das Objekt wert ist.

Nash-Gleichgewicht(e) dieses Spiels:
Alle Profile $(b_i)_{i \in N}$ mit
$v_1 \geq b_1 \geq v_2$, $b_j = b_1$ für mindestens ein $j \in N \setminus \{1\}$
$b_i \leq b_1$ für alle $i \in N \setminus \{1\}$
Dies sind alle Nash-Gleichgewichte!

Beweis:

1. Spieler 1 gewinnt in allen Nash-Gleichgewichten (d.h. $b_1 \geq b_j$)

   Annahme: $i \neq 1$ gewinnt, d.h. $b_i > b_1$, $i \neq 1$

   (a) Sei $b_i > v_2$, dann $u_i(b) = (b_{-i}, b_i) = v_i - b_i < 0$ und Spieler i kann seinen Gewinn verbessern, wenn er $b_i = 0$ bietet.

   (b) Sei $b_i \leq v_2$, dann kann Spieler 1 seinen Gewinn verbessern, wenn er $b_1 = v_2 + \epsilon$ bietet

2. Sei b^* das höchste Gebot, dann muß $b^* \geq v_2$ sein, sonst hätte Spieler 2 gewinnen können und positiven Nutzen erhalten. Und: $b^* \leq v_1$, ansonsten könnte Spieler 1 durch Reduktion seinen Nutzen erhöhen

3. Es muss j mit $b_j = b_1$ geben, sonst könnte Spieler 1 reduzieren.

$\square$

2.2.1 Interpretation von Nash-Gleichgewichten

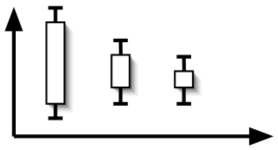
1. Resultiert die iterierte Eliminierung strikt dominierter Strategien in einer eindeutigen Strategiekombination, so ist dies ein Nash-Gleichgewicht des ursprünglichen Spiels - und das einzige. (vgl HA 2.2)

2. Ansonsten:

   - Deduktive/rationale Deutung:
     $\rightsquigarrow$ künstliche Agenten sind hier ideal!
     (zwei Probleme: mehr als ein Equilibrium/ Bestimmung des Equilibriums)

- Erfahrung/Lernen: Spieler tendieren auf Grund gemachter Erfahrung hin zu Nash-Gleichgewichten.

  (Beispiel Lotterie: setze auf 0...999 50 Cent und teile die Hälfte des eingesetzten Geldes durch alle Spieler, die richtig lagen. Durchschnittlicher Gewinn: $0,5 \cdot \frac{1000}{2}$ Dollar=250 Dollar. Bei Lotterie in New Jersey, kann man über die Jahre hinweg einen Trend feststellen, de zu gleichm"ßiger Auszahlung tendiert.

)

1. Existiert immer ein Nash-Gleichgewicht? Nein! Ja, wenn wir Strategien randomisieren.

2. Sind die Nash-Gleichgewichte eindeutig? Nein.

3. Sind Nash-Gleichgewichte einfach zu berechnen? Ja, im Matrixfall. Vermutlich nein für randomisierte Spiele.