Informatik III:
Theoretische Informatik

Prof. Bernhard Nebel
Dr. Christian Becker-Asano & Moritz Göbelbecker

Wintersemester 2012/13
Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 1

Abgabe: 29. Oktober 2012

Bitte beachten Sie die folgenden **wichtigen** Hinweise:

(a) Der Sinn von Übungsaufgaben besteht darin, dass Sie sich selbst mit dem Inhalt der Vorlesung auseinandersetzen. Aus diesem Grund werden (vollständig oder teilweise) abgeschriebene Abgaben nicht akzeptiert, d.h. das Abschreiben wie das Abschreiben-Lassen von Lösungen können dazu führen, dass Ihre Lösung des Übungsblatts nicht korrigiert und damit als nicht bearbeitet gewertet wird. Im Wiederholungsfall wird die Zulassung zur Prüfung nicht erteilt.

(b) Voraussetzung für die Zulassung zur Prüfung ist, dass Sie mindestens 50% der möglichen Punkte erzielen. Ferner sollen Sie mindestens zweimal in den Übungen eine Aufgabe vorrechnen.

(c) Die Lösungen sind jeweils montags bis spätestens *14 Uhr* abzugeben. Die Abgabe Ihrer Lösung ist entweder im Hörsaal oder per Email an Ihre(n) Tutor(in) möglich. In beiden Fällen müssen Ihr Name sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe oben auf dem Lösungsblatt angegeben werden.

(d) Die Übungsgruppen werden Donnerstags von 12:15 bis 14:00 Uhr und Freitags von 8:15 bis 10:00 Uhr nach Bedarf angeboten.

Aufgabe 1.1 (Falscher direkter Beweis, 2 Punkte)

Welcher Schritt in dem folgenden Beweis, dass $n = n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$, ist falsch und warum?

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \tag{1}$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2 \tag{2}$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1) \tag{3}$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 \tag{4}$$

$$\left[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)\right]^2 = \left[n - \frac{1}{2}(2n+1)\right]^2 \tag{5}$$

$$(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1) \tag{6}$$

$$n + 1 = n \tag{7}$$

Aufgabe 1.2 (Indirekter Beweis, 2 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe eines indirekten Beweises, dass es keine zwei natürlichen Zahlen a und b gibt, so dass $a^2 - b^2 = 10$.

Aufgabe 1.3 (Induktionsbeweis, 2 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe eines Induktionsbeweises, dass für alle $n \geq 1$ gilt, dass $9^n - 3^n$ durch 6 teilbar ist. Geben Sie den *Induktionsanfang*, den *Induktionsschritt* sowie die Verwendung der *Induktionsvoraussetzung* explizit an.

Aufgabe 1.4 (Falscher Induktionsbeweis, 2 Punkte)

Welcher Schritt im folgenden Induktionsbeweis ist falsch und warum ist er falsch?
Es bezeichne $G \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen und $U \subseteq \mathbb{N}$ der Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Behauptung: Für jede endliche Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ gilt entweder $S \subseteq U$ oder $S \subseteq G$.

Induktionsanfang: Die Behauptung ist wahr für alle $S \subseteq \mathbb{N}$ mit nur einem Element.

Induktionsschritt: Sei S eine Menge mit $n+1$ Elementen. Wähle ein Element e aus und setze $S' := S \setminus \{e\}$. S' hat nur n Elemente und nach Induktionsvoraussetzung gilt die Behauptung, dass entweder $S' \subseteq U$ oder $S' \subseteq G$. Nun entfernen wir ein anderes Element e' und erhalten $S'' := S \setminus \{e'\}$. Da auch S'' nur n Elemente besitzt, gilt wiederum, dass entweder $S'' \subseteq U$ oder $S'' \subseteq G$. Für ein $e'' \in S' \cap S''$ gilt nun $e'' \in U$ oder $e'' \in G$. Dann gilt $S', S'' \subseteq U$ (oder $S', S'' \subseteq G$) und $e, e' \in U$ (oder $e, e' \in G$). Also gilt die Behauptung auch für die Menge S. Dies vervollständigt den Induktionsbeweis für $n+1$ Elemente.

Aufgabe 1.5 (Kardinalität von Sprachen; 1+1 Punkte)

Es seien L und L' Sprachen über demselben Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind L und L' endlich, so gilt $|L \cdot L'| = |L| \cdot |L'|$.

(b) Ist Σ endlich, so gilt: $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$.

Σ^n bezeichne hierbei der Menge der Wörter über Σ der Länge n.

Definitionen und Hinweise: Unter einem *Alphabet* verstehen wir eine beliebige nicht leere Menge Σ (meist fordert man, dass diese Menge endlich ist). Die Elemente eines Alphabets bezeichnet man als *Symbole* oder *Zeichen*. Ein *Wort* über Σ ist eine beliebige endliche Folge $x_1 \dots x_n$ von Symbolen aus Σ. Auch die leere Sequenz ist ein Wort und wird das *leere Wort* genannt und mit ε bezeichnet. Die Menge aller Wörter wird mit Σ^* bezeichnet, die Menge der nicht-leeren Wörter mit Σ^+. Wörter kann man hintereinander schreiben (*konkatenieren*), d.h. sind $w = x_1 \dots x_n$ und $u = y_1 \dots y_m$ Wörter über dem Alphabet Σ, so ist auch $wu = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$ ein Wort über Σ. Man sagt auch, dass Σ^* unter Konkatenation abgeschlossen ist. Die Länge eines Wortes, $|w|$, ist die Länge der Zeichenfolge w.
Unter einer Sprache über Σ versteht man eine beliebige Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$. Sind $L, L' \subseteq \Sigma^*$ Sprachen über einem Alphabet Σ, so sind alle üblichen mengentheoretischen Operationen wie Schnitt ($L \cap L'$), Vereinigung ($L \cup L'$) und (relatives) Komplement ($L \setminus L'$) definiert. Das Komplement von L, $\overline{\Sigma}$, ist definiert als $\Sigma^* \setminus L$. Es gelten dann die üblichen mengenthereotischen Gesetze. Ferner ist die *Konkatenation* (auch: *Produkt*) von Sprachen L über Σ und L' über Σ' als jene Sprache über $\Sigma \cup \Sigma'$ definiert, die man erhält, indem man alle Wortpaare $(w, w') \in L \times L'$ hintereinander schreibt (konkateniert), d.h. $L \cdot L' := \{ww' \in (\Sigma \cup \Sigma')^* \ : \ w \in L, w' \in L'\}$. Rekursiv ist *n-fache Produkt* einer Sprache L wie folgt definiert: $L^0 := \{\varepsilon\}$ und für $n > 1$, $L^n := L \cdot L^{n-1}$.