Theoretische Informatik

Prof. Dr. B. Nebel, Prof. Dr. G. Lausen
M. Ragni, K. Simon und C.-N. Ziegler
WS 2004/2005

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 6

Abgabe: 3. Dezember 2004

Aufgabe 6.1 (Polynomielle Reduktion – 4 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. $\leq_p$ ist eine transitive Relation.
2. (a) $A \leq_p B \;\Leftrightarrow\; \overline{A} \leq_p \overline{B}$
   (b) $A \in \mathsf{P} \;\Leftrightarrow\; \overline{A} \in \mathsf{P}$

Aufgabe 6.2 (KNAPSACK – 4 Punkte)
Analog zum in der Vorlesung behandelten CLIQUE-Problem können auch drei Varianten des KNAPSACK-Problems definiert werden: Gegeben sind ein Rucksack und n Objekte mit Gewichten $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{N}$ sowie ein Gewichtslimit G. Zusätzlich seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ die Nutzenwerte für die Objekte.

- Variante 1: Gibt es zu gegebenem Nutzenwert A eine Bepackung des Rucksackes, die das Gewichtslimit respektiert und mindestens den Nutzen A erreicht?
- Variante 2: Berechne den größten erreichbaren Nutzen.
- Variante 3: Berechne eine optimale Bepackung des Rucksackes.

Zeigen Sie:

1. Wenn die Variante 1 (Entscheidungsvariante) von KNAPSACK polynomiell lösbar ist, dann auch Variante 2 (Optimierungsvariante).
2. Wenn die Variante 1 von KNAPSACK polynomiell lösbar ist, dann auch die Variante 3 (Optimierungsvariante mit Lösung).

Aufgabe 6.3 (Die SPACE-Klassen – 4 Punkte)
Definition 1. Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Die Klasse $TIME(f)$ besteht aus allen Sprachen A, für die es eine deterministische TM M gibt mit $A = L(M)$ und $time_M(x) \leq f(|x|))$ für alle $x \in \Sigma^*$. Hierbei bedeutet $time_M : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ die Anzahl der Rechenschritte von M bei Eingabe x.
Definition 2. Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Die Klasse $SPACE(f)$ besteht aus allen Sprachen A, für die es eine deterministische TM M gibt mit $A = L(M)$ und $space_M(x) \leq f(|x|))$ für alle $x \in \Sigma^*$. Hierbei bedeutet $space_M : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ die Anzahl der von M benutzten Bandzellen bei Eingabe x.

Es ist klar, dass z. B.

$$\mathbf{P} = \bigcup_{p \text{ Polynom}} TIME(p)$$

gilt. Zeigen Sie: Für eine beliebige Funktion f gilt:

1. $SPACE(f) \subseteq TIME(2^{O(f)})$.
2. $TIME(f) \subseteq SPACE(f)$.

Aufgabe 6.4 (PARTITION – 4 Punkte)
Das Problem PARTITION ist wie folgt definiert:
Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$?
Zeigen Sie: PARTITION ist NP-vollständig.

Hinweis: Reduzieren Sie das **NP**-vollständige SUBSETSUM-Problem darauf.
Gegeben: $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, ..., k\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$.

Achtung: Die Voraussetzungen für die Zulassung zur Klausur umfassen die Teilnahme an den Übungen sowie die sinnvolle Bearbeitung der Übungsblätter.

Die Übungsblätter sollen in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden.Bitte schreiben Sie beide Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf den Lösungszettel.
Abgabe bis 11.15 Uhr in der Vorlesung oder Einwurf in die entsprechenden Briefkästen im Erdgeschoss von Gebäude 51.