Theoretische Informatik

Prof. Dr. B. Nebel, Prof. Dr. G. Lausen
M. Ragni, K. Simon und C.-N. Ziegler
WS 2004/2005

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Abgabe: 19. November 2004

Aufgabe 4.1 (Rekursiv aufzählbar – 4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Seien L und L' rekursiv aufzählbar. Dann ist $L - L'$, die Mengendifferenz der beiden Sprachen rekursiv aufzählbar.

2. Für zwei Sprachen L und L' mit $L \subseteq L'$ und L rekursiv aufzählbar gilt: Falls L' nicht rekursiv aufzählbar ist, dann ist $L' - L$ unendlich.

Aufgabe 4.2 (Entscheidbarkeit I – 4 Punkte)
Für eine Menge $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir die Projektion von B als

$$Pr(B) = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in B\}.$$

Zeigen Sie:
Eine Menge ist genau dann aufzählbar, wenn sie die Projektion einer entscheidbaren Menge ist.

Aufgabe 4.3 (Entscheidbarkeit II – 4 Punkte)
Zeigen Sie:

1. Falls das Halteproblem entscheidbar wäre, dann könnte man jede rekursiv aufzählbare Sprache entscheiden.

2. Sind die folgenden Probleme über Programme in einer beliebigen Programmiersprache entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (a) Gegeben sei ein Programm P. Gefragt: Läuft das Programm für eine festgelegte Eingabe x in eine Endlosschleife?

   (b) Gegeben seien zwei Programme P_1 und P_2. Gefragt: Erzeugen beide Programme bei gleicher Eingabe die gleiche Ausgabe?

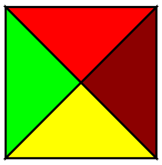
Aufgabe 4.4 (Entscheidbarkeit III – 4 Punkte)
Welche der folgenden Probleme über Turingmaschinen sind entscheidbar, und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Gegeben sei eine Turingmaschine M, ein Zustand z und ein Wort w. Erreicht M den Zustand z wenn sie mit w im Ausgangszustand gestartet wird?

2. Gegeben sei eine Turingmaschine M, der Startzustand z_0 und ein Zustand z. Gibt es eine Konfiguration $(z_0\underline{a}w)$ von der aus eine Konfiguration mit Zustand z erreichbar ist?

3. Gegeben sei eine Turingmaschine M und zwei voneinander verschiedene Zustände z_i und z_j. Gibt es eine Konfiguration $(uz_i\underline{a}v)$ von der aus eine Konfiguration mit Zustand z_j erreichbar ist?
4. Gegeben sei eine Turingmaschine M und ein Symbol a. Schreibt M jemals das Symbol a wenn sie mit leerem Band gestartet wird?
5. Gegeben sei eine Turingmaschine M. Schreibt M jemals ein vom Leerzeichen verschiedenes Symbol wenn sie mit leerem Band gestartet wird?
6. Gegeben sei eine Turingmaschine M und ein Wort w. Bewegt M jemals den Kopf nach links wenn sie mit w als Eingabe gestartet wird?
7. Gegeben seien zwei Turingmaschinen. Akzeptiert eine der Maschinen $\overline{L}$, wenn die andere Maschine die Sprache L akzeptiert?
8. Gegeben seien zwei Turingmaschinen. Gibt es ein Wort, bei dem beide halten?

Aufgabe 4.5 (Genieaufgabe – freiwillig)
Sei eine endliche Menge von 4-farbigen Plättchen mit Einheitsgröße gegeben. Jedes dieser Plättchen habe unendlich viele Kopien.



Gibt es einen Algorithmus, der entscheidet, ob $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit diesem Satz Plättchen so parkettiert werden kann, dass nur Dreiecke mit gleicher Farbe aneinander liegen, wobei ein Plättchen p_0 links unten vorgegeben ist?
Formal: Ein Plättchensatz ist ein 7-Tupel $\mathcal{P} = (P, p_0, F, o, u, l, r)$; dabei ist P eine endliche Menge von Plättchen mit Startplättchen $p_0 \in P$, F eine endliche Menge von Farben und die Funktionen $o, u, l, r : P \to F$ definieren die Farben der Plättchen am oberen, unteren, linken und rechten Rand. Eine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $\mathcal{P}$ ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to P$ mit:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= p_0 & \\ o(f(m,n)) &= u(f(m,n+1)) & \text{für alle } m,n \in \mathbb{N} \\ r(f(m,n)) &= l(f(m+1,n)) & \text{für alle } m,n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Beweisen Sie: Das Problem, ob für einen gegebenen Plättchensatz die Ebene parkettierbar ist, ist unentscheidbar.
Hinweis: Reduzieren Sie das Halteproblem darauf und benutzen Sie die Plättchen zur Kodierung von Konfigurationen.
Achtung: Diese Aufgabe schicken Sie bitte per Mail bis spätestens 26. November an `info3@informatik.uni-freiburg.de`.

Die Übungsblätter sollen in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen, die Nummer Ihrer Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors auf den Lösungszettel.

Abgabe bis 11.15 Uhr in der Vorlesung oder Einwurf in die entsprechenden Briefkästen im Erdgeschoss von Gebäude 51.