Theoretische Informatik

Prof. Dr. B. Nebel, Prof. Dr. G. Lausen
M. Ragni, K. Simon und C.-N. Ziegler
WS 2004/2005

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 15 — Lösungen

Aufgabe 15.1 (Abschlusseigenschaften kf. Sprachen und Kellerautomaten)

Wie bereits in der Vorlesung gezeigt sind die kontextfreien Sprachen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleeneschem Stern abgeschlossen. Diese Abschlusseigenschaften wurden anhand von Grammatiken bewiesen. Zeigen Sie nun, dass dies ebenfalls mithilfe von Kellerautomaten beweisbar gewesen wäre.

Seien also M_1 und M_2 Kellerautomaten. Konstruieren Sie Kellerautomaten die $L(M_1) \cup L(M_2)$, $L(M_1)L(M_2)$ und $L(M_1)^*$ akzeptieren.

Lösung:

(a) Sei $M_1 = (K_1, \Sigma, \Gamma_1, \Delta_1, S_1, F_1)$ und $M_2 = (K_2, \Sigma, \Gamma_2, \Delta_2, S_2, F_2)$ wobei $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Durch Einführen eines neuen Startzustandes, von welchem man nicht-deterministisch entscheiden kann ob ein Wort vom Automaten M_1 oder M_2 erkannt werden soll, erhalten wir den Vereinigungsautomaten.

$$M_\cup = (K_1 \cup K_2 \cup \{S'\}, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Delta_\cup, S', F_1 \cup F_2)$$

mit

$$\Delta_\cup = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(S', \epsilon, \epsilon)(S_1, \epsilon), (S', \epsilon, \epsilon)(S_2, \epsilon)\}$$

(b) Einen, Automaten der die Konkatenation akzeptiert, erhält man, indem man zuerst Automat M_1 auf die Eingabe ansetzt bis dieser in einen Endzustand mit leerem Keller gelangt. Auf die Resteingabe setzt man nun den zweiten Automaten M_2 an. Um dies zu bewerkstelligen, müssen wir erkennen können wann der Keller leer ist, hierzu wird ein Kellerendmarkierungszeichen hinzugenommen, welches zu Beginn in den Keller geschrieben wird.

$$M_\circ = (K_1 \cup K_2 \cup \{S'\}, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\sharp\}, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta', S', F_2)$$

mit

$$\Delta' = \{((S', \epsilon, \epsilon)(S_1, \sharp)) \cup ((q, \epsilon, \sharp)(S_2, \epsilon) | q \in F_1)\}$$

(c) Um einen Kellerautomaten zu erzeugen, der den Kleeneschen Stern akzeptiert, muss man garantieren, dass es von jedem Zustand, in welchem der Automat ein Wort akzeptieren würde, auch wieder möglich ist in den Startzustand zu gelangen. Zudem muss das leere Wort erkannt werden. Dies erfordert, dass der neue Startzustand auch ein Endzustand ist.

$$M_* = (K_1 \cup \{S'\}, \Sigma, \Gamma_1 \cup \{\sharp\}, \Delta, S', F_1 \cup \{S'\})$$

$$\Delta = \{\Delta_1 \cup ((S', \epsilon, \epsilon)(S_1, \sharp)) \cup ((q, \epsilon, \sharp)(S', \epsilon) | q \in F_1)\}$$

Aufgabe 15.2 (Akzeptieren mit Endzustand)

In der Vorlesung wurden die Kellerautomaten dergestalt eingeführt, dass sie nur dann akzeptieren, wenn sie sich in einem Endzustand befinden und der Keller leer ist. Sei $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ ein Kellerautomat.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (s, w, \epsilon) \vdash_M^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in F\}$$

Wir definieren die durch Endzustand akzeptierte Sprache L_{End} wie folgt:

$$L_{\text{End}}(M) = \{w \in \Sigma^* | (s, w, \epsilon) \vdash_M^* (q, \epsilon, \gamma) \text{ für ein } q \in F \text{ und } \gamma \in \Gamma^*\}$$

(a) Zeigen Sie, dass ein Kellerautomat M' existiert mit $L(M') = L_{\text{End}}(M)$.
(b) Zeigen Sie, dass ein Kellerautomat M'' existiert mit $L_{\text{End}}(M'') = L(M)$.

Lösung:

(a) Wenn M seine Eingabe abgearbeitet hat und sich in einem Endzustand befindet, so muss sich M' ebenfalls in einem Endzustand befinden und zusätzlich einen leeren Keller haben. Hierzu führt man einfach einen neuen Zustand ein, der zum einzigen Endzustand in M' erklärt wird. Ist M in einem Endzustand und die Eingabe abgearbeitet, so geht M' in eben diesen Endzustand und poppt jedes beliebige Zeichen vom Keller bis dieser leer ist, wodurch M' ebenfalls akzeptiert.

$$M' = (K', \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F')$$

$$K' = K \cup \{f'\} \text{ mit } f' \notin K$$
$$F' = \{f'\}$$
$$\Delta' = \{\Delta \cup ((f, \epsilon, \epsilon)(f', \epsilon) | f \in F) \cup ((f', \epsilon, \sigma)(f', \epsilon) | \sigma \in \Gamma)\}$$

(b) Führe ein Kellersymbol hinzu, dass anzeigt ob der Keller leer ist.

$$M'' = (K'', \Sigma, \Gamma'', \Delta'', s'', F'')$$

$$K'' = K \cup \{s'', f''\} \text{ mit } s'', f'' \notin K$$
$$F'' = \{f''\}$$
$$\Gamma'' = \Gamma \cup \{\sharp\} \text{ wobei } \sharp \notin \Gamma$$
$$\Delta'' = \{\Delta \cup ((s'', \epsilon, \epsilon)(s, \sharp)) \cup ((f, \epsilon, \sharp)(f'', \sharp) | f \in F)\}$$

Aufgabe 15.3 (Symmetrische Differenz)

Folgende Fragestellung soll beantwortet werden: Sind die kontextfreien Sprachen unter der symmetrischen Differenz abgeschlossen? Beweisen Sie ihre Antwort. (Hinweis: Symmetrische Differenz $A - B \cup B - A$)

Lösung:

Die kontextfreien Sprachen sind nicht unter symmetrischer Differenz abgeschlossen! Beweis: Betrachte 2 kontextfreie Sprachen A und B mit $A, B \subseteq \Sigma^*$. Sei A eine echte Teilmenge von B so folgt daraus:

$$\begin{array}{rcccl} & (A - B) & \cup & (B - A) & = \\ = & \emptyset & \cup & \bar{A} \text{ (bzgl. B)} & = \bar{A} \end{array}$$

Die Abgeschlossenheit unter symmetrischer Differenz kann also auf die Abgeschlossenheit unter Komplement zurückgeführt werden. Da kontextfreie Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen sind folgt die Behauptung.

Aufgabe 15.4 (Bottom-Up Parsing)

Sei folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, M, W, Q\}$, $\Sigma = \{D, N, P, V\}$ und Produktionsregeln P wie folgt gegeben:

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & MW \mid SQ, \\ W & \rightarrow & VM, \\ M & \rightarrow & DN \mid MQ, \\ Q & \rightarrow & PM \end{array} \right\}$$

Hierbei seien die Terminale D, N, P, V als *Tokens* angenommen, auf welche Zeichenströme bei der lexikalischen Analyse abgebildet werden. Hierbei repräsentiert das Token D einen Artikel, beispielsweise "der", "die", "dem" etc., N ein Nomen, z.B. "Auto", "Mann", "Geld", V ein Verb, also beispielsweise "fliegen", "sah", "suchte", und P eine Präposition, z.B. "mit", "nach", "für" und so weiter.

(a) Bilden Sie die Eingabesequenz "Der Agent nahm den Auftrag in die Hand" auf einen Tokenstrom ab. *Beispiel:* Der Satz "Das Flugzeug startet" wird zur Token-Sequenz DNV.

(b) Nehmen Sie den so erhaltenen Tokenstrom und parsen sie diesen nach dem in der Vorlesung vorgestellten Bottom-Up Verfahren bezüglich G. Geben Sie hierzu in jeder Zeile Schritt, Aktion (*shift* oder *reduce*), angewandte Regel (im Falle von *reduce*), momentanen Stack und die Resteingabe an. Wird der Satz als grammatikalisch korrekt erkannt?

Lösung:

(a) Der gesuchte Tokenstrom ist $DNVDNPDN$.

(b) Der Satz, bzw. der transformierte Tokenstrom, wird erkannt. Beweis durch Parser-Tabelle (siehe Tabelle 1).

Achtung: Das vorliegende Übungsblatt wird *weder* korrigiert *noch* vorgerechnet, da die Besprechung des vorliegenden Blattes bereits in die vorlesungsfreie Zeit fallen würde. Eine Abgabe erfolgt somit nicht und das Blatt ist lediglich zum Selbststudium gedacht. Da der Stoff aber dennoch für die Klausur relevant ist, wird in den kommenden Tagen auf der Web-Seite zur Vorlesung eine Musterlösung vorliegen.

Schritt	Aktion	Regel	Stack	Restwort
0	shift	-	D	$NVDNPDN$
1	shift	-	DN	$VDNPDN$
2	reduce	$M \rightarrow DN$	M	$VDNPDN$
3	shift	-	MV	$DNPDN$
4	shift	-	MVD	$NPDN$
5	shift	-	$MVDN$	PDN
6	reduce	$M \rightarrow DN$	MVM	PDN
7	reduce	$W \rightarrow VM$	MW	PDN
8	reduce	$S \rightarrow MW$	S	PDN
9	shift	-	SP	DN
10	shift	-	SPD	N
11	shift	-	$SPDN$	$-$
12	reduce	$M \rightarrow DN$	SPM	$-$
13	reduce	$Q \rightarrow PM$	SQ	$-$
14	reduce	$S \rightarrow SQ$	S	$-$

Tabelle 1: Parser-Tabelle des Bottom-Up Parsings