Spieltheorie

Nash-Gleichgewichts-Berechnung

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bernhard Nebel und Robert Mattmüller

Arbeitsgruppe Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

14. Mai 2012

Algorithmen

Nash-Gleichgewichte in endlichen Nullsummenspielen

- Existenz nach Satz von Nash
- Nach Satz über Zusammenhang zwischen Nash-Gleichgewichten und Paaren von Maximinimierern: Es genügt, Paare von Maximinimierern zu suchen.
- Technik: Lineares Programm aufstellen und lösen

Kodierung als Lineares Programm

- Seien A_1 und A_2 endlich.
- Spieler 1 sucht gemischte Strategie α_1.
- Für jedes α_1 von Spieler 1:
  - Bestimme Nutzen bei bester Antwort von Spieler 2,
  - maximiere darüber.

Kodierung als Lineares Programm

Constraints:

$$\alpha_1(a_1) \geq 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1$$

$$\sum_{a_1 \in A_1} \alpha_1(a_1) = 1$$

$$U_1(\alpha_1, a_2) = \sum_{a_1 \in A_1} \alpha_1(a_1) \cdot u_1(a_1, a_2) \geq u \quad \text{für alle } a_2 \in A_2$$

Maximiere u.

- Lösung dieses LPs ist Maximinimierer für Spieler 1.
- Lösung eines analogen LPs liefert Maximinimierer für Spieler 2.

Kodierung als Lineares Programm

Beispiel: Elfmeterspiel

Schütze

Torhüter	L	R
L	$1, -1$	$-1, 1$
R	$-1, 1$	$1, -1$

LP für Spieler 1: Maximiere u unter den Bedingungen

$$\alpha_1(L) \geq 0$$
$$\alpha_1(R) \geq 0$$
$$\alpha_1(L) + \alpha_1(R) = 1$$
$$\alpha_1(L) - \alpha_1(R) \geq u$$
$$-\alpha_1(L) + \alpha_1(R) \geq u$$

Kodierung als Lineares Programm

- Alternative Kodierung möglich, da bei Nullsummenspielen, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen, Maximinimierung und Minimaximierung das gleiche Ergebnis liefern.
- LP mit Ungleichungen

$$U_1(a_1, \alpha_2) \leq u \qquad \text{für alle } a_1 \in A_1$$

aufstellen und u minimieren. Für α_2 entsprechend.

Allgemeine Zwei-Personen-Spiele

- Für allgemeine Spiele funktioniert LP-Methode nicht.
- Benutze stattdessen Instanzen des Linear Complementarity Problem (LCP):
  - lineare (Un-)Gleichungen wie bei LPs
  - zusätzliche Bedingungen der Form $x_i \cdot y_i = 0$ (oder äquiv. $x_i = 0 \vee y_i = 0$) für Variablen $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$
  - keine Optimierungsbedingung
- Mit LCPs sind Nash-Gleichgewichte für beliebige Zwei-Personen-Matrixspiele beschreibbar.

Allgemeine Zwei-Personen-Spiele

Seien A_1 und A_2 endlich und (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht mit Nutzenprofil (u, v). Dann:

$$
\begin{aligned}
u - U_1(a_1, \alpha_2) &\geq 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1 && (1)\\
v - U_2(\alpha_1, a_2) &\geq 0 \quad \text{für alle } a_2 \in A_2 && (2)\\
\alpha_1(a_1) \cdot (u - U_1(a_1, \alpha_2)) &= 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1 && (3)\\
\alpha_2(a_2) \cdot (v - U_2(\alpha_1, a_2)) &= 0 \quad \text{für alle } a_2 \in A_2 && (4)\\
\alpha_1(a_1) &\geq 0 \quad \text{für alle } a_1 \in A_1 && (5)\\
\sum_{a_1 \in A_1} \alpha_1(a_1) &= 1 && (6)\\
\alpha_2(a_2) &\geq 0 \quad \text{für alle } a_2 \in A_2 && (7)\\
\sum_{a_2 \in A_2} \alpha_2(a_2) &= 1 && (8)
\end{aligned}
$$

Allgemeine Zwei-Personen-Spiele

Bemerkungen zur Kodierung:

- in (3) und (4): etwa $\alpha_1(a_1) \cdot (u - U_1(a_1, \alpha_2)) = 0$ gdw. $\alpha_1(a_1) = 0$ oder $u - U_1(a_1, \alpha_2) = 0$. Das gilt in jedem Nash-Gleichgewicht, denn
  - falls $a_1 \notin supp(\alpha_1)$, dann $\alpha_1(a_1) = 0$, und
  - falls $a_1 \in supp(\alpha_1)$, dann $a_1 \in B_1(\alpha_2)$, also $U_1(a_1, \alpha_2) = u$.
- Die obige LCP-Formulierung kann mit zusätzlichen Variablen in LCP-Normalform umgeformt werden.

Allgemeine Zwei-Personen-Spiele

UNI FREIBURG

Theorem

Ein Strategieprofil (α_1, α_2) in gemischten Strategien mit Auszahlungsprofil (u, v) ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn es eine Lösung der LCP-Kodierung über (α_1, α_2) und (u, v) ist.

Beweis

- Nash-Gleichgewichte sind Lösungen des LCPs: klar wegen Support-Lemma.
- Lösungen des LCPs sind Nash-Gleichgewichte: Sei $(\alpha_1, \alpha_2, u, v)$ eine Lösung des LCPs. Wegen (5) bis (8) sind α_1 und α_2 gemischte Strategien. (...)

Beweis (Forts.)

- (...) Wegen (1) ist u mindestens die maximale Auszahlung über alle möglichen reinen Antworten, wegen (3) ist u genau die maximale Auszahlung. Ist $\alpha_1(a_1) > 0$, dann hat die Auszahlung für Spieler 1 als Reaktion auf α_2 wegen (3) den Wert u. Mit der Linearität des erwarteten Nutzens folgt, dass α_1 eine beste Antwort auf α_2 ist. Analog zeigt man, dass auch α_2 eine beste Antwort auf α_1 und somit (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht mit Auszahlung (u, v) ist. □

Lösungsalgorithmus für LCPs

Naiver Algorithmus:

Zähle alle $(2^n - 1) \cdot (2^m - 1)$ möglichen Paare von Supportmengen auf. Für jedes solche Paar $(supp(\alpha_1), supp(\alpha_2))$:

- Konvertiere das LCP in ein lineares Programm:
  - Lineare (Un-)Gleichungen bleiben erhalten.
  - Bedingungen der Form $\alpha_1(a_1) \cdot (u - U_1(a_1, \alpha_2)) = 0$ werden durch eine neue lineare Gleichung ersetzt:
    - $u - U_1(a_1, \alpha_2) = 0$, falls $a_1 \in supp(\alpha_1)$ und
    - $\alpha_1(a_1) = 0$, sonst,

    Entsprechend für $\alpha_2(a_2) \cdot (v - U_2(\alpha_1, a_2)) = 0$.
  - Zielfunktion: maximiere konstante Nullfunktion.
- Wende Lösungsalgorithmus für lineare Programme auf das transformierte Programm an.

Lösungsalgorithmus für LCPs

- Laufzeit des naiven Algorithmus beträgt $O(p(n+m) \cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist.
- In der Praxis besser geeignet: Lemke-Howson-Algorithmus.
- Komplexität:
  - unbekannt, ob $\textsc{LcpSolve} \in \mathrm{P}$.
  - $\textsc{LcpSolve} \in \mathrm{NP}$ klar (naiver Algorithmus als nichtdeterministischer Polynomialzeitalgorithmus).

Komplexität

Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Berechnung

Theorem

Zu entscheiden, ob ein Nash-Gleichgewicht existiert, bei dem Spieler 1 eine Auszahlung von mindestens k erhält, ist NP-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen. □

Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Berechnung

Def.: Pareto-Optimalität

Ein Nash-Gleichgewicht hat ein Pareto-optimales Auszahlungsprofil $(v_1, \dots, v_n)$, wenn es kein anderes Strategieprofil gibt, für dessen Auszahlungsprofil $(v'_1, \dots, v'_n)$ gilt, dass $v'_i \geq v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und dass es ein $i = 1, \dots, n$ mit $v'_i > v_i$ gibt.

Theorem

Zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht mit Pareto-optimalem Auszahlungsprofil gibt, ist NP-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen. □

Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Berechnung

Theorem

Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler eine bestimmte Aktion manchmal (bzw. nie) spielt. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen. □

Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Berechnung

Theorem

Es ist NP-schwer zu entscheiden, ob ein Spiel mindestens zwei Nash-Gleichgewichte besitzt. □