Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

Prof. Dr. B. Nebel, Prof. Dr. W. Burgard
Dr. A. Kleiner, R. Mattmüller
Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2008

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 13. Juni 2008

Aufgabe 6.1 (Formalisierung in Prädikatenlogik)

Seien L ein zweistelliges und P und O zwei einstellige Prädikatensymbole, d ein Konstanten- und s ein einstelliges Funktionssymbol. Die intendierte Semantik der Symbole sei gegeben durch die Interpretation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $L^{\mathcal{I}} = <$, $P^{\mathcal{I}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ Primzahl}\}$, $O^{\mathcal{I}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$, $d^{\mathcal{I}} = 3$ und $s^{\mathcal{I}}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Symbolisieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.
(b) Es gibt eine von drei verschiedene Primzahl.
(c) Für jede Primzahl n ist $n + 1$ keine Primzahl, außer falls $n + 1 = 3$.
(d) Es gibt genau eine gerade Primzahl.
(e) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
(f) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.

Aufgabe 6.2 (Syntax und Semantik der Prädikatenlogik)

(a) Klassifizieren Sie die folgenden Ausdrücke als Terme, Grundterme, Atome, Formeln, Sätze, oder metasprachliche Aussagen. Wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, geben Sie bitte alle an. In den Ausdrücken sind a und b Konstante, x und y Variable, f und g Funktionen und P und Q Prädikate.

(a) $P(x, y)$
(b) $f(a, b)$
(c) $\mathcal{I} \models P(a, f(b))$
(d) $\mathcal{I}, \alpha \models P(a, f(x))$
(e) $f(g(x), b)$
(f) $Q(x)$ ist erfüllbar.

(g) $\exists x(P(x, y) \land Q(x)) \lor P(y, x)$
(h) $\forall x(\exists y(P(x, y) \land Q(x)) \lor P(x, y))$
(i) $\forall x \forall y(P(x, y) \land Q(x) \lor P(f(y), x))$
(j) $Q(x) \lor P(x, y) \equiv P(x, y) \lor Q(x)$

(b) Betrachten Sie die folgende Formelmenge:

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} \forall x \neg P(x, x) \\ \forall x \forall y \forall z((P(x, y) \land P(y, z)) \Rightarrow P(x, z)) \\ \forall x \forall y(P(x, y) \lor x = y \lor P(y, x)) \end{array} \right\}$$

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ mit $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_4\}$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{I} \models \Theta$ (d. h. $\mathcal{I} \models F$ für alle $F \in \Theta$). Warum ist es nicht nötig, für die Konstruktion eines Modells von Θ eine Variablenbelegung α anzugeben?

(c) Gibt es auch Modelle für Θ mit unendlichem Träger $\mathcal{D}$?

Aufgabe 6.3 (Skolem-Normalform)

Bringen Sie die folgenden Formeln in Skolemform:

(a) $F_1 = \forall x(\exists y R(x,y) \wedge \exists y R(y,x))$

(b) $F_2 = \forall x \forall z(R(x,z) \Rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge R(y,z)))$

(c) $F_3 = \forall x \exists z(R(x,z) \wedge \neg\exists y(R(x,y) \wedge R(y,z)))$

Aufgabe 6.4 (Herbrand-Expansion)

Sei $F = \forall x \forall y(P(x, f(x, g(y))) \wedge P(h(y), f(y,y)))$.

(a) Geben Sie zehn möglichst kleine Terme aus dem Herbrand-Universum von F an.

(b) Geben Sie fünf möglichst kleine Formeln aus der Herbrand-Expansion von F an.

Die Übungsblätter dürfen und sollten in Gruppen von drei (3) Studenten bearbeitet werden. Bitte füllen Sie das Deckblatt[1] aus und heften Sie es an Ihre Lösung.

[1] `http://www.informatik.uni-freiburg.de/~ki/teaching/ss08/gki/coverSheet-german.pdf`