Diplomarbeit

Einführung in eine Theorie der ternären RST-Kalküle für qualitatives räumliches Schließen

Formale Eigenschaften bekannter und neuer ternärer Kalküle im Lichte einer Verallgemeinerung binärer Relationenalgebren

Alexander G. Scivos

April 2000

Zusammenfassung

Ich betrachte in dieser Arbeit formale Eigenschaften von Kalkülen für qualitatives räumliches Schließen. Ein Kalkül ist ein logisches System, das dazu dient, formal aus Aussagen neue Aussagen durch gültige Schlüsse zu ziehen; in dieser Arbeit handelt es sich um Aussagen über räumliche Konstellationen von Punkten in der Ebene. Ich konzentriere mich dabei auf Kalküle, deren Aussagen auf ternären Relationen basieren, die invariant unter Rotationen, Streckung und Translationen sind (RST-Kalküle), und im speziellen auf Winkelkalküle, deren Relationen durch Winkel definiert sind, für die ich Ansätze zu einer algebraischen Theorie entwickle als Verallgemeinerung von zylindrischen Algebren und Relationenalgebren.
Ein Kalkül heißt korrekt, wenn in ihm alle Schlüsse gültig sind, und vollständig, wenn alles, was in ihm gilt, gefolgert werden kann, entsprechende Begriffe führe ich für einzelne Operationen des Kalküls ein. Ausgehend vom Nachweis, daß die von C. Freksa eingeführten Einzel- und Doppelkreuzkalküle nicht permutations- und kompositionsvollständig zugleich sind, zeige ich, daß man auch durch weitere Verfeinerung nur zu unendlichen permutations- und kompositionsvollständigen Kalkülen gelangen kann. Statt dessen definiere ich ein gröberes endliches Kalkül Cv , das zwar weniger ausdrucksstark ist, aber den Vollständigkeitsanforderungen genügt, und weise nach, daß es das feinste mit diesen Eigenschaften ist.
Ich zeige, daß die Erfüllbarkeitsfrage für alle Winkelkalküle NP-hart ist, und zwar für Freksas Kalküle sowie für einige von mir definierte Kalküle sogar für deren minimale Teilkalküle, in denen die Wissensbasis exakt gegeben ist.

Abstract

In this paper, I consider formal properties of calculi for qualitative spatial reasoning. In the calculi of this paper, sentences about spatial configurations of points in the plane will be deduced. I focus on calculi consisting of relations that are invariant under rotation, stretchings and translations (RST calculi), especially on angle calculi whose relations are defined by angles. For the RST-calculi, I develop approaches for a fundamental theory combining elements of cylindrical algrebra's and Ladkin's and Maddux' relation algebras.
A calculus is sound if all conclusions are sound, and complete if everything that follows from a given description can be deduced by the calculus. I use a similar vocabulary for operations in the calculus. After showing that some of the operations lack these properties in two calculi introduced by C. Freksa and their refinement defined by myself, I conclude that all composition and permutation complete refinements are infinite. Instead, I define a coarser calculus $\mathfrak{C}v$, and show that it is the finest finite composition and permutation complete calculus.
I prove that the satisfyability problem is NP-hard for all angle calculi, and moreover for some subcalculi in which the knowledge base is exact for all relations.

Resumo

In ĉi tiu verko, mi rigardos formalaj ecoj de kalkuloj, kies eroj estas atestoj pri aranĝaĵoj de punktoj en la ebeno. Mi koncentriĝos je kalkuloj, kies rilatoj estas trilokaj kaj neŝanĝantaj per tordiĝoj, ekstendiĝoj kaj forŝviĝoj (RST-kalkuloj), speciale je anguldifinitaj kalkuloj, kies rilatoj estas difinitaj per anguloj. Por RST-kalkuloj, mi eklaboros baza teorio kiu konektiĝos la cilindrica algebro kaj la rilata algebro de Ladkin kaj Maddux.
Kalkuloj estas korekta, se ĉiuj konkludaĵoj estas valida, kaj kompleta, se ĉiuj, kiu deduktiĝas, deveniĝeblas per la kalkulo. Similajn termojn mi uzos por la operatoroj. Pruvinte, ke kelkaj operatoroj en du kalkuli de C. Freksa estas nekompleta, mi pruvos, ke ĉiuj kompositiaj kaj permutiaj kompletaj kalkuloj estas infinita. Sekvonte, mi difinos pli malfajnan kalkulon Cv , kaj pruvos, ke ĝi estas la plej fajna kompositie kaj permutatie kompleta kalkulo.
Krome, mi pruvos, ke la problemo decidi la realiĝebleco de ĉiuj anguldifinitaj kalkuloj estas NP-dura, kaj same eĉ por la kalkulvariantoj, kiuj nur enhavas la plej detalajn rilatojn (kio signifas, ke la sciadbazo estas tutprecisa).

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Start, Weg und Ziel **2**

1.1 Startpunkt: Das Thema 2

1.1.1 Der große Zusammenhang 2

1.1.2 Die Aufgabe 3

1.1.3 Das Konzept 3

1.1.4 Die Realisation 4

1.2 Mein Weg: Der Aufbau der Arbeit 5

1.3 Mein Ziel: Kalküle für QRS 6

2 Grundbegriffe **13**

2.1 Kalküle 13

2.2 Der Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{SC}$ 23

2.2.1 Die Bedeutung der Basis 25

2.2.2 Die Operationen 28

2.3 Informationserhalt 31

2.4 Verfeinerung als Weg zu besseren Kalkülen 38

2.5 Kriterien 44

2.6 Ziel 51

3 Relationenalgebren **57**

3.1 Zylindrifikationen 58

3.2 Singuläre und reguläre Relationen 61

3.3 Kompositionen 62
3.4 k-stellige Relationenalgebren 65
3.5 Topologische Eigenschaften 73

4 RST-Relationenalgebren 78

4.1 Grundlegendes über RST-Relationenalgebren 78
4.2 Der verfeinerte Kalkül für 3 Punkte und Orientierung ($\mathfrak{RC}$) . . . 84
4.2.1 Die Relationen von $\mathfrak{RC}$ 84
4.2.2 Eigenschaften von $\mathfrak{RC}$ 88
4.3 Topologische Eigenschaften 90
4.4 Transformation und Komposition 91
4.5 Feinere und gröbere Kalküle 98
4.5.1 Der Konvexe Kalkül $\mathfrak{C}v$ 98
4.5.2 Der geordnete Linien-Kalkül $\mathfrak{L}$: 103
4.5.3 Winkelkalküle 104

5 TCI-Abschluss und Endlichkeit 107

5.1 Definitionen 107
5.2 (Un-)Endlichkeit von $\mathfrak{K}^{TCI}$ 110

6 Winkelkalküle 121

6.1 Der TCI-Abschluß der Winkelkalküle 121
6.1.1 Der Hauptsatz der Winkelkalküle 126
6.2 Sonderstellung von $\mathfrak{RC}$ 146
6.3 Ausdrucksmächtigkeit 150

7 Komplexitätsbetrachtungen 156

7.1 Das Erfüllbarkeitsproblem 156
7.2 NP-Härte von $\mathfrak{K}$-SAT für einige ternäre Relationenalgebren $\mathfrak{K}$ . . 158
7.2.1 NP-Härte-Beweise 159

7.3 NP-Härte von Basiskalkülen 164
7.3.1 NP-Härte von $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ 164
7.3.2 Der Beweis im Detail 175
7.3.3 Komplexität weiterer Basiskalküle 211

8 Schlußbetrachtungen 220

8.1 Zusammenfassung 220
8.2 Weitere Forschung 222
8.3 Schlußwort 225

A Notationen, Index und Literaturhinweise 227

B Dateien: Die Kompositionstabellen 236

B.1 Die Komposition ${}_3\diamond_2$ in $\mathfrak{RC}$ 238
B.2 Die Komposition ${}_3\diamond_2$ in $\mathfrak{C}v$ 247
B.3 Die Komposition ${}_3\diamond_2$ in $\mathfrak{L}$ 248

Abbildungsverzeichnis

1.1 Ein Alltagsbeispiel für räumliches Schließen 7
1.2 Oggs Weg 7
1.3 Mögliche Realisierungen von CSP a,b,c,e,u 9
1.4 Die 6 Transformationsoperationen entsprechen wie dargestellt den Permutationen ihrer Elemenete. 11

2.1 Prinzip der Relationen des Einzelkreuzkalküls $\mathfrak{SC}$ 24
2.2 Mögliche Realisierungen des CSP a,b,u,d,m (Oggs Weg) 29
2.3 Skizze zum Beweis der Kompositionsvollständigkeit, 1. Fall . . 34
2.4 Skizze zum Beweis der Kompositiosvollständigkeit, 2. Fall . . . 34
2.5 Skizze zum Beweis der Kompositionsvollständigkeit, 3. Fall: Anwendung der Achsenstreckungsinvarianz 35
2.6 Wimpellemma 36
2.7 Anwendung des Wimpellemmas für den Beweis der Kompositionsvollständigkeit 36
2.8 Die Relationen von Freksas Kalkül DC 41
2.9 Ein Modell von CSP Par 45

3.1 a. Diagonalrelation b. eine weitere singuläre Relation c. eine reguläre Relation. 60
3.2 Die lose Komposition a. unsymmetrisch b. symmetrisch c. Die steife Komposition 64

4.1 a. Die Relationen von $\mathfrak{RC}$ als Regionen der (komplexen) Ebene b. Die Relationen von $\mathfrak{C}v$ als Regionen der (komplexen) Ebene 86

4.2 Die Winkelrelationen der Winkelkalküle 105

5.1 Skizze zum Beweis des 0-1-Satzes 94. Für ein hinreichend großes k ist $1-z^k \in (Reg\mathsf{R}^k)^{(12)}$ und $|1-z^k| > 1$ 111

5.2 Skizze zum Weglemma: a. Die Aussage, b. Skizze zum Beweis . 117

5.3 a. Skizze zum Beweis von Theorem 96 ($\mathfrak{C}v$ ist feinster verwendbarer anschaulicher Kalkül). b. Skizze zum Beweis von Theorem 101. In beiden Fällen ist B_w beschränkt, weil es einen geschlossenen Weg im Komplement gibt. 119

6.1 Skizze zum Beweis des Linienlemmas 109 127

6.2 Skizze zum Beweis des Symmetrielemmas 110 128

6.3 Skizze zum Beweis derKonvertierung 130

6.4 Skizze zum Beweis des Lemmas 121 Kreise 141

6.5 Skizze zum Beweis des Hauptsatzes 143

7.1 Eine Realisierung einer Konstellation als Instanz von $\mathfrak{C}q$ -SAT, die einer Belegung $x_1 =$ falsch, $x_2 =$ wahr, $x_n =$ falsch entspricht. 162

7.2 Die wichtigsten Einzelkomponenten: a. Die Erfüllbarkeitskomponente S_j b. Die Variablenkomponente V_i c. Die Transferkomponente $T_{L_{jl}}$ oder $T_{C_{jl}}$ oder T_{S_j} 166

7.3 Das Schema der Konstruktion 168

7.4 Der offene Keil einer Menge (hier exemplarisch von $H \cup V \cup L$) ist die Region der Punkte, die oberhalb aller durch Punkte dieser Menge definierten Geraden liegen. Für endliche Punktmengen ist er nicht leer, da es eine maximale Steigung gibt. 173

7.5 Einige benötigte Konstrukte 174

7.6 Auf-, absteigende und Paare ohne Bezeichnung. Die intendierte Semantik der syntaktischen Definition ist, daß in jeder Realisierung θvon $C_{\mathcal{F}}$ ein absteigendes Paar (e_1, e_2) so interpretiert sein muß, daß e_2^θ unterhalb oder rechts unterhalb von e_1^θ liegt und ein aufsteigendes Paar (e_1, e_2) so interpretiert sein muß, daß e_2^θ rechts oder rechts oberhalb von e_1^θ liegt. Paare, bei denen das zweite Element links des ersten liegt, bleiben ohne spezielle Bezeichnung. 177

7.7 Skizze zur Multiplikatorfunktion von H 179

7.8 Die ersten Constraints aus Tabelle 7.1, schematisch 182

7.9 a. Die Addition der Streckenlängen in den Komponenten L, C b. Die jeweils nächste Erfüllbarkeits-Einzelkomponente S_{j+1} soll ganz oberhalb der Transfergeraden der vorigen liegen. 185

7.10 Grobes Schema zur Anordnung der Transferelemente in Bezug zu den Nichttransferelementen 187

7.11 Die Geraden durch zwei Punkte und die Senkrechten dazu begrenzen die möglichen Instanzierungen für den dritten. Die Relation eines Tripels hängt mit den Steigungen der involvierten Geraden zusammen. 190

7.12 Die noch zu untersuchenden Fälle 198

7.13 Skizzen zum Nachweis der Ordnungskorrektheit von $\prec$ a. Normalfall, b./c. Spezialfall, d. allgemeiner Fall 203

7.14 Konstruktion der Transferpunkte 209

7.15 Das Grundgerüst der Konstruktion für den NP-Härte-Beweis für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$ 213

7.16 Die Integration der Veriablen-Elemente in den Wahrheitswertkomponenten der Konstruktion für den NP-Härte-Beweis von $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$ 214

7.17 Die Transferkomponente des NP-Härte-Beweises für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$. z_{jk} und x sind auf der gleichen Seite der Linie, die *wahr* von *falsch* trennt. 215

7.18 Die Erfüllbarkeitstestkomponenten des NP-Härte-Beweises für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$. Für alle j : z_{j1}, z_{j2} und z_{j3} sind auf der verschiedenen Seite der Linie, die *wahr* von *falsch* trennt. Genau in so einem Fall repräsentieren sie eine Erfüllung von NOT-ALL-EQUAL-3SAT. 216

7.19 Die Instanzierung einer erfüllbaren Konstellation. (NP-Härte-Beweis für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$) 218

Tabellenverzeichnis

1.1 Erklärung der Schreibweise für Operationen und die aus ihnen resultierenden Relationen 11

2.1 Die wichtigsten, häufig auftretenden Operationen und ihre Interpretationen. Die übrigen Operationen werden später erklärt . 16

2.2 Die Transformationsoperationen von SC 29

2.3 Die Definition der Relationen im Doppelkreuzkalkül, unter Zuhilfenahme der $\mathfrak{SC}$-Relationen. Dabei bedeutet $\mathscr{r}$ (r_1/r_2), daß $\{\ \mathscr{r}\ \}(a,b:c) \Leftrightarrow \{\ \mathscr{r}_1\ \}(a,b:c) \wedge \{\ \mathscr{r}_2\ \}(b,a:c)$ (also $\{\ \mathscr{r}_1^{(12)}\ \}(a,b:c)$). 40

2.4 Tabelle zur Veranschaulichung der Permutationen von DC . . . 43

2.5 Die Transformationen von e_{12}. 44

3.1 Konzeptuelle Nachbarschaften von $\mathfrak{DC}$. „ = “: gleiche Relation, trivial konzeptionell benachbart. „k.b.“ = konzeptionell benachbart. „$\emptyset$“: keine gemeinsamen konzeptionelle Nachbarn angegebene Relationen: gemeinsame konzeptionelle Nachbarn = trennende Relation. 75

4.1 Die Definition der Relationen von $\mathfrak{RC}$ ist sowohl durch die Winkel als auch (als arithmetische Alternative für den Computer) durch die Werte A, B, Γ, Ω möglich. 89

4.2 Definition der Relationen von $\mathfrak{C}v$ als Vergröberung von $\mathfrak{RC}$ . . 98

4.3 Die Permutationen von $\mathfrak{C}v$ 99

4.4 Die Transformationen von $\mathfrak{K}_{\alpha^o}$ für einen Winkel $\alpha^o < 180^o$. Außerdem enthält $\mathfrak{K}_{\alpha^o}$ auch die Relationen mit dem jeweils negierten Wert $-\alpha$. 105

7.1 Die basierend auf den Ordnungen definierten Standard-Constraints 181

8.1 Überblick über die formalen Eigenschaften der vorgestellten Kalküle 221

B.1 Tabelle zur Veranschaulichung der Permutationen des verfeinerten Kalküls RC 237

Vorgeschichte

Die Steinzeitmenschen Ogg und Mogg saßen vor ihrer Höhle am Feuer. „Mogg, was ist der Sinn des Denkens?“, fragte Ogg. „Das kann dir nur der weise Magier sagen.“, sagte Mogg, der etwas schlauer war als Ogg. „Der weise Magier, gibt es den wirklich?“ – „Ja, sagte Mogg. Aber er ist nicht leicht zu finden. Höre genau zu.“ Ogg nickte dümmlich, aber interessiert. „Schau. So wie Du stehst, blickst Du genau auf den großen Berg in der Ferne. Nun schau. Siehst Du auch die alte Zypresse hier?“ Ogg nickte dümmlich. „Ja. Genau rechts von mir.“ „So wie du stehst, so geh nun los,“ sagte Mogg. „Ganz bis zum Berg?“ – „Oh nein, das wird nicht nötig sein. Geh nur so weit du magst, steck deinen Speer in Erde dort, dreh Dich nach rechts, und schreite weiter fort. Dann gehst so lange, bis Du die Zypresse wieder zu Deiner rechten siehst.“ –„Mmh.“ – „und dann, und jetzt pass genau auf, dann drehst Du dich scharf um, und gehe fast zurück, doch nimm bloß nicht genau den selben Weg, denn das bringt Unglück.“ – „Ich will's mir merken.“ – „Von Zeit zu Zeit achte darauf, wo die Zypresse ist, wenn Du zu Deinen Speer hin schaust. Ist sie zu Deiner Seite dann genau, dann biege von deinem Weg wieder nach links ab, und lasse Deinen Speer wo er ist. Der nächste Mensch, der Dir begegnen wird, ist der weise Magier.“ - „Aber wie wird er denn wissen, auf welchem Weg ich komme?“ – „Das braucht er nicht zu wissen. Er wird da sein, egal wie scharf deine Kehre ist. Denn er ist ja ein Magier.“ Mogg lächelte …
Ogg zog los und folgte genau Moggs Anweisungen, die ihm ja in der Tat Spielraum gelassen hatten. Und tatsächlich — wie Mogg es gesagt hatte, lief Ogg nach einem Tagesmarsch geradewegs auf einen alten Mann zu, der träumerisch vor seiner Höhle saß. Allein die Präsenz des Alten bewirkte eine Veränderung in Ogg, so tief, daß er ausrief: „Oh, ich kann es wohl verstehen, der Sinn des Denkens ist es, das Gehen von Wegen zu vermeiden.“ – „Oh nein, Ogg, da irrst Du“, sagte dieser weise, „der Sinn des Denkens ist es, neue Wege zu gehen.“

Kapitel 1

Einleitung: Start, Weg und Ziel

1.1 Startpunkt: Das Thema

1.1.1 Der große Zusammenhang

Seit Menschen exisiteren, tun sie dreierlei. Sie agieren, sie denken und sie träumen. Sie agieren dort, wo sie sind, und schaffen sich so ein Umfeld, in dem sie sich zurechtfinden. Sie gehen in dieser Welt ihren Weg, und nehmen wahr, in welche Richtung sie gegangen sind – und dann träumen sie. Sie träumen von Zielen, die sie noch erreichen können.
Das tut auch die Menschheit als Ganzes. Sie hat viele Träume. Manche Träume dienen nur dazu, das Leben angenehmer zu gestalten, andere Träume basieren auf der Faszination dessen, was uns umgibt, und auf dem Wunsch, das zu verstehen, was uns fasziniert. Es gibt einen Traum,der verbindet beides. Der Wunsch, Gott zu spielen, Helfer zu erschaffen, die uns gleichen, sozusagen.

Es ist nicht klar, ob wir ihn uns je werden erfüllen können. Wir arbeiten aber daran. Eine Voraussetzung hierfür ist, unser eigenes Denken zu begreifen und zu schematisieren - und schließlich zu automatisieren. Dieser Teil der Wissenschaft, die künstliche Intelligenz, befaßt sich mit den verschiedensten Bereichen. Die vorliegende Arbeit beispielsweise widmet sich Aufgaben der räumlichen Orientierung und der Analyse räumlicher Konstellationen. Anwendungen finden sich im Bereich von Formerkennung, Selbstlokalisation und Routenplanung. Künstliche Systeme müssen so wie wir Menschen in der Lage sein, Wissen zu speichern und Schlußfolgerungen zu ziehen – sie müssen in der Lage sein zu denken. Dazu gehört auch zu erkennen, in wieweit das abgeleitete Wissen korrekt sein kann. Vor allem Informationen, die auf Messungen beruhen, unterliegen immer einer gewissen Ungenauigkeit. Darüberhinaus gibt es

Übertragungsfehler, Programmfehler und falsch gestellte Aufgaben, die dann als solche erkannt werden müssen. Daraus ergibt sich eine zentrale Frage an die Künstliche Intelligenz: Besteht die Möglichkeit, daß das gespeicherte Wissen ein Modell der Realität ist? Dies ist die Frage nach der Konsistenz räumlicher Informationen.

1.1.2 Die Aufgabe

In der Praxis kann es notwendig sein, solche Entscheidungen schnell genug treffen zu können. Meistens sind detailliertere Informationen nur mit mehr Zeit- und Rechenaufwand überprüfbar. Allein schon deshalb ist es notwendig, das Wissen zu abstrahieren. Außerdem hat jeder Computer nur endlich viel Speicherplatz. Deswegen wird das in der Natur theoretisch beliebig genaue Wissen in einem System möglicher Aussagen unvermeidlich verallgemeinert. Jedes System für logisches Schießen, jeder logische Kalkül, muß automatisch einen Kompromiß darstellen zwischen den Anforderungen an seine Ausdrucksmächtigkeit, das heißt welche Aussagen es überhaupt treffen kann, und der notwendigen Einfachheit, damit die Aussagen mit möglichst praktikablem Aufwand entschieden werden können. Für die Navigation auf ebener Oberfläche, etwa in einer hinreichend lokalen Umgebung auf der Erde, mag es ausreichen, zweidimensionale Modelle zu betrachten. Welcher Kalkül gewählt wird, wird also im konkreten Fall immer von der Art der Daten, von den Anforderungen und vom verfügbaren Wissen abhängen. Dabei wird aber zusätzlich das Wissen um diese formalen Eigenschaften einfließen, um unnötig aufwendige oder zu ausdrucksschwache Kalküle ausschließen zu können.

1.1.3 Das Konzept

Prinzipiell lassen sich zwei Ansätze unterscheiden: ***Quantitative Kalküle*** , die räumliches Wissen mit hochgradig präzisen Zahlenwerten beschreiben und die ihre Schlußfolgerungen berechnen, und Kalküle für ***qualitatives räumliches Schließen (QRS)*** , deren Wissensbeschreibungen auf Relationen basieren. Eine Relation kann man sich als Abstraktion einer Menge von Werten oder Wertetupeln aufgrund einer gemeinsamen Eigenschaft zu einer Beschreibungseinheit vorstellen. Beispielsweise die Eigenschaft, daß der letzte Wert eines Tripels zwischen dem ersten und dem zweiten liegt, definiert die Relation "zwischen". Schlußfolgerungen basieren dann auf Tabellen, in denen Operationen auf diesen Relationen definiert sind.
Zwar sind quantitative Ansätze wesentlich ausdrucksstärker, denn sie unterscheiden zwischen je zwei ungleichen Werten, während in QSR-Ansätzen qualitativ gleiche Werte zusammengruppiert werden [IM99]. Aber dem stehen

zahlreiche Nachteile der quantitativen Ansätze entgegen. Zum einen benötigen quantitative Kalküle exakte Informationen als Ausgangspunkt, die aufgrund von Meß- und Speicherungenauigkeit nie exakt möglich sind. Der Ausweg, die Zahlenwerte als unscharf (mit Fehlertoleranz oder als Wahrscheinlichkeitsverteilung) zu behandeln, führt in der Regel zu mehr Rechenaufwand und weniger Genauigkeit. Hinzu kommt, daß auf dem Wege digitaler Berechnungen als reine Simulation analoger Berechnungen unerwünschte Nebeneffekte auftreten können, vor allem bei komplexen Rechnungen. Kleine Unterschiede können nivelliert werden, andererseits können kleine Fehler in den Anfangsdaten auch zu großen Fehlern in den Ergebnissen führen [Bar95]. Und schließlich ist das Ziel des logischen Schließens üblicherweise ein qualitatives: eine Entscheidung. Tatsächlich ist in den meisten Fällen bereits der Input nur unpräzise, kategorisiert oder unvollständig. Menschliche Begriffe und Denkweisen lassen sich direkt in qualitative Kalküle übertragen. Darüberhinaus sind Qualitative Kalküle meistens schneller und transparenter, denn sie entsprechen der Art und Weise, wie auch wir Menschen leichter Schlußfolgerungen ziehen (vgl. [Fre92]). Mittlerweile konstatieren Amar Isli und Reinhard Moratz [IM99], daß in letzter Zeit vor allem qualitative Kalküle populär geworden sind und nun innerhalb der KI etabliert sind.

1.1.4 Die Realisation

In der vorliegenden Arbeit werde ich einige solcher Kalküle für QRS vorstellen und die formalen Eigenschaften der Kalküle analysieren.
Für binäre Kalküle, die zwei Objekte vergleichen, existiert eine ausgedehnte und weitgehend bekannte mathematische Theorie: Die der Relationenalgebren von R. Maddux und P. Ladkin [PL94, Mad91]. Darüberhinaus existieren zahlreiche konkrete binäre Kalküle, die die Axiome der Relationenalgebren erfüllen. Im wesentlichen gehen diese Ansätze auf J. Allen [All83] zurück, der Relationen zwischen Intervallen definierte, beispielsweise die Relation, daß ein Intervall ein anderes einschließt. Verallgemeinerungen für zwei und mehr Dimensionen [Gue89, BCFdC99] sowie ein Kalkül für Schlüsse auf topologischen Relationen [Ege91] wurden vorgestellt. Die formalen Eigenschaften, insbesondere die Rechenzeit-Komplexitätsklasse dieser Kalküle wurden untersucht. [MBV89, vBC90, Lig91, PL93, Ren98, Lig98, BCFdC99] Doch mittels diesr Kalküle lassen sich nur Aussagen zwischen zwei Elementen treffen. Falls die Elemente in den Relationen Punkte sind, dann kann in binären Kalkülen etwa ausgedrückt werden, daß diese in großem oder kleinem Abstand zueinander stehen. Richtungen lassen sich allenfalls in Bezug auf eine von außen vorgegebene absolute Richtung einordnen, wie etwa bei [Fra91].
In der vorliegenden Diplomarbeit werden im Gegensatz dazu Kalküle mit Relationen behandelt, die Richtungen und Entfernungen relativ zueinander in

Bezug setzen, etwa die Relation "zwischen" oder "rechter Winkel" – diese erfordern drei Punkte. Es ist bekannt, daß diese ternären Relationen für viele Zwecke benötigt werden. Beispielsweise wurde gezeigt, daß man die Formulierung der geometrischen Sätze der euklidischen Geometrie zwar allein auf die Relation „ rechter Winkel" gründen kann, aber nicht auf eine einzelne zweistellige Relation. [WS83]. Dadurch wird klar, daß ternäre Kalküle wesentlich ausdrucksmächtiger als die meisten bisher vorgestellten (binären) relativen Kalküle. [IC98]
Daher werde ich mich im wesentlichen auf diese spezielle Klasse beschränken. Für die Klasse der qualitativen ternären Kalküle gibt es erst einige wenige konkrete Ansätze, deren formale Eigenschaften zudem weithin unbekannt sind. An ternären rst-Kalkülen gibt es bisher Erweiterungen der Intervallalgebra [Lig91], eine ternäre Verfeinerung des CYCORD-Kalküls von A. Isli und A. Cohn [IC98] und die im nächsten Kapitel vorgestellten Ansätze zu winkelvergleichenden Kalkülen von C. Freksa [Fre92, ZF93]. Ganz aktuell ist ein Kalkül von A. Isli und R. Moratz [IM99], in dem sie nur die Entfernungen vergleichen.

1.2 Mein Weg: Der Aufbau der Arbeit

Für die Winkelkalküle sind bislang keine Aussagen über Komplexität und kaum andere formale Eigenschaften bekannt. Diesem Mangel will ich abhelfen. Ich werde mich dabei nur mit Modellen dieser Kalküle im $\mathbb{R}^2$ beschäftigen, da Winkeldefinitionen mindestens 2 Dimensionen erfordern, die 2D-Kalküle eindimensionale Relationen als Spezialfall beinhalten, und für eindimensionale Grundmengen bereits 3-stellige und höherstellige Kalküle untersucht wurden [Lig91]. Für Modelle im $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ andererseits reichen ternäre Kalküle für eine gewinnbringende Beschreibung nicht aus, da drei Punkte immer in einer Ebene liegen.

Zunächst führe ich die in meiner Arbeit benötigten Begriffe ein – im Rest dieses Kapitels erkläre ich intuitiv die Grundidee, und in Kapitel 2 definiere ich formal die benötigten Grundbegriffe und beweise einige relativ einfache Zusammenhänge zwischen ihnen. Um diese Begriffe mit etwas Leben zu füllen, stelle ich parallel dazu die beiden Kalküle von Christian Freksa [Fre92] vor, auf denen viele der in meiner Arbeit definierten Kalküle beruhen. Insbesondere erkläre ich die in meiner Arbeit wichtige Methode der Verfeinerung und entwickle ich die formalen Eigenschaften, die ich untersuchen will, anhand dieser Beispiele.
Die bisher ausgearbeiteten mathematischen Verallgemeinerungen der Relationenalgebren, z. B. die zylindrischen Algebren [Hal62, LHT71] (aktuelle Weiter-

entwicklungen finden sich in [And97]), erweisen sich jedoch als nicht passend für die Beschreibung dieser Kalküle. Deshalb werde ich in Kapitel 3 einige Begriffe einführen, die für eine umfassende algebraische Theorie dieser speziellen Klasse von Kalkülen, den ternären Relationenalgebren notwendig werden.
Diese abstrakten Konzepte nutze ich in Kapitel 4 zur Einführung der von mir entwickelten Kalküle. Dabei verfolge die Philosophie weiter, daß Winkel eine zentrale Rolle für die Definition der Relationen spielen. Bei der Bewertung dieser Kalküle orientiere ich mich an den in Kapitel 2 definierten Kriterien, insbesondere Vollständigkeit der in den Ableitungen verwendeten Operationen, Beschreibbarkeit durch die Arithmetik und Ausdrucksmächtigkeit der Kalküle.
In Kapitel 5 und 6 verallgemeinere ich wieder und gehe ich der Frage nach, ob Mängel in den Anforderungen behoben werden können, und wie ausdrucksmächtig und wie groß diese Kalküle dann sind. Ich zeige insbesondere, daß ab einer gewissen Komplexität Kalküle, die allen Konsitenzanforderungen entsprechen, notwendigerweise unendlich werden.
Kann man dies umgehen, indem man kleinere Mängel in Kauf nimmt? Kann man durch Vereinfachung schließlich sogar zu Kalkülen gelangen, die zwar kleine Informationsverluste beinhalten, aber in polynomieller Zeit überprüft werden können? Antworten hierauf liefern die Komplexitätsanalysen in Kapitel 7. In diese Analysen gehen einige der in Kapitel 6 gewonnenen Aussagen über die Ausdrucksmächtigkeit der Kalküle ein, also darüber, welche Relationen man in ihnen definieren kann. Es zeigt sich dabei, daß alle verwandten Kalküle ab einer gewissen Komplexitätsstufe ähnliche Eigenschaften haben.
Aufgrund all dieser Ergebnisse lege ich in Kapitel 8 nahe, den "konvexen Kalkül" weiter zu studieren, denn es ist der ausdrucksstärkste Kalkül unterhalb dieser Komplexitätsstufe und sticht gerade wegen seiner Einfachheit beim zusammenfassenden Vergleich als bester Kandidat für einen Kompromiß zwischen Ausdrucksmächtigkeit und Handhabbarkeit hervor.

1.3 Mein Ziel: Kalküle für QRS

Wir Menschen gehen täglich mit Informationen über den uns umgebenden Raum um. Wenn wir einen Weg gegangen sind, sind wir in der Lage, beim nächsten Mal gezielt Abkürzungen zu finden. Zuweilen genügt dazu schon eine Beschreibung. "Gehe geradeaus bis zur übernächsten Kreuzung, biege dann rechts ab, bei der nächsten Möglichkeit wieder rechts und gehe dann bis zur nächsten Kreuzung.", läßt uns schon ahnen, daß wir unnötig weit nach vorne und dann wieder zurück geschickt werden. Wir können wohl gleich bei der ersten Kreuzung rechts abbiegen (vgl. Abbildung 1.1.a). Sicher?

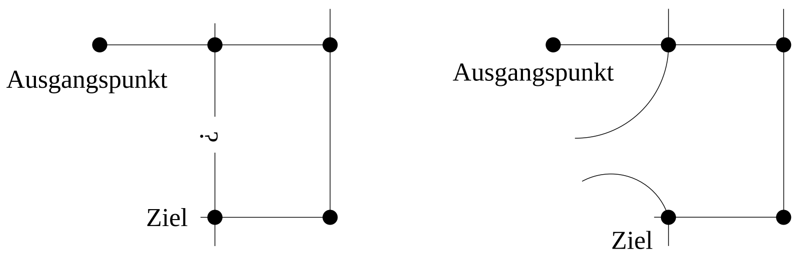


Abbildung 1.1: Ein Alltagsbeispiel für räumliches Schließen

Wir konstruieren in unserem Kopf, bewußt oder unbewußt ein Modell der Umgebung, das den gegebenen Beschreibungen entspricht. Die Frage ist nun: Entspricht dieses Modell jedem möglichen, sodaß jede Folgerung, die wir ziehen, auch mit Sicherheit stimmt? Um die Garantie zu erlangen, daß Folgerungen universell sind, betreiben wir Mathematik – und führen Beweise aus. (Vgl. Abbildung 1.1.b.)

Wir kennen geometrische Sachverhalte, die wir ausnutzen können, beispielsweise daß im Rechteck die beiden Thaleskreise über den Diagonalen zusammenfallen. Mit Hilfe dieser Tatsache sieht man leicht, daß Ogg nach seiner Wanderung in jedem Fall wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt. (Vgl. Abbildung 1.2)

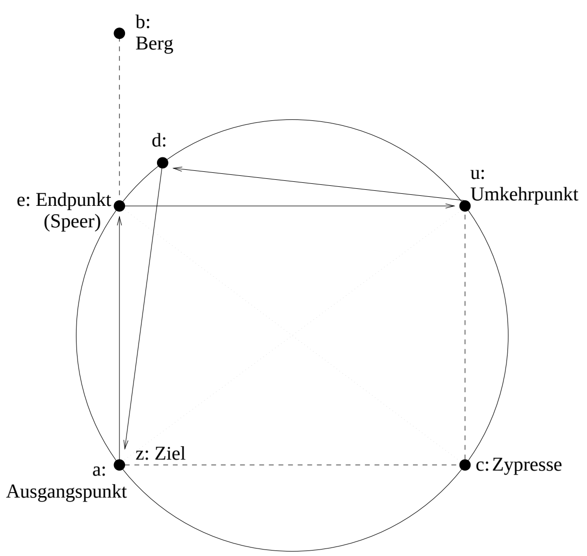


Abbildung 1.2: Oggs Weg

Wenn wir mit geometrischen Sätzen nicht weiterkommen, konstruieren wir für die Menge der in der Beschreibung auftauchenden relevanten Punkte die mögli-

chen Realisierungen in einem Modell, etwa als Punkte des $\mathbb{R}^2$, und schränken durch Hinzunehmen der gegebenen Information und der daraus ableitbaren Informationen die möglichen Realisierungen schrittweise ein - solange, bis entweder keine weitere Einschränkung mehr möglich ist, oder bis eine Inkonsistenz gefunden wird, das heißt, daß es mindestens für einen Punkt keine Realisierungsmöglichkeit gibt. Dann gibt es kein Modell der Beschreibung.
Wir wollen also dieses Schließen des Menschen auf automatisierte Systeme übertragen. Da wir in der Regel in abstrakten Begriffen und nicht in mathematischen Zahlenwerten denken, wenn wir Folgerungen ziehen, liegt eine Beschreibung in QRS-Kalkülen nahe.

Aber wie soll man bei der Auswahl der Relationen vorgehen?
Die Relationen eines Kalküls sollten möglichst den Begriffen entsprechen, in denen wir denken, und zwar vor allem aus drei Gründen: Erstens, um die Übertragung einer Aufgabe in den Computer zu vereinfachen, zweitens, weil dann dabei am wenigsten Information verloren geht, und drittens, weil die Ergebisse dann am einfachsten zu interpretieren sind.
In was für Begriffen denken wir? Betrachten wir die Vorgeschichte (vor Kapitel 1). „So wie Du stehst, blickst Du genau auf den großen Berg ... die alte Zypresse ... [ist] genau rechts.“ Dabei gibt „So wie du stehst“ den ***Standpunkt*** (a) an, der Berg (b) gibt eine ***Referenzrichtung*** an, zu der die Zypresse, das beschriebene ***Zielobjekt*** (c) durch die Beschreibung in Bezug gesetzt wird. Man kann also sagen, die Zypresse ist rechts seitlich von Oggs Ausgangspunkt. Zwischen den drei Elementen Startpunkt, Referenzpunkt und Zielpunkt wird durch die Beschreibung eine dreistellige (ternäre) Relation definiert. Dafür werde ich in meiner Arbeit stets die Schreibweise $\mathsf{Relation}$ $(Startpunkt, Referenzpunkt : Zielpunkt)$ verwenden. Die Beschreibung des Beispiels wird etwa durch $\{$ rl (right lateral) $\}(a, b : c)$ formalisiert.
Zwar sind bei „geh nun los ... [in Richtung] zum Berg ... soweit wie du magst,“ diese drei Punkte nicht explizit, doch immerhin sind implizit angegeben: Der Endpunkt (e) ist näher als der Berg (b) vom Ausgangspunkt (a), beide liegen in der gleichen Richtung. Formal entspricht dem die Relation $\{$ sc(straight line closer) $\}(a, b : e)$. Diese Information definiert die Position nicht auf einer absoluten Skala, nicht in einem absoluten Referenzsystem, sondern relativ, aus der subjektiven Sicht Oggs, des Agenten. Die relative Beschreibung ermöglicht es, viele verschiedene Möglichkeiten knapp zu beschreiben. Einige Beispiele für solche Modelle zeigt Abbildung 1.3.

Trotz und wegen dieser Zusammenfassung vieler Relationen zu einer haben QRS-Kalküle viele Vorteile: Die Information ist bei Anforderungen an räumliche Orientierung typischerweise in dieser Form gegeben ist. [Fre92] Ein zweiter Vorteil ist, daß die Relation aus Sicht des Agenten immer in gleicher Weise definierbar ist, egal wie viel er sich bewegt, ohne daß er seine exakte Posi-

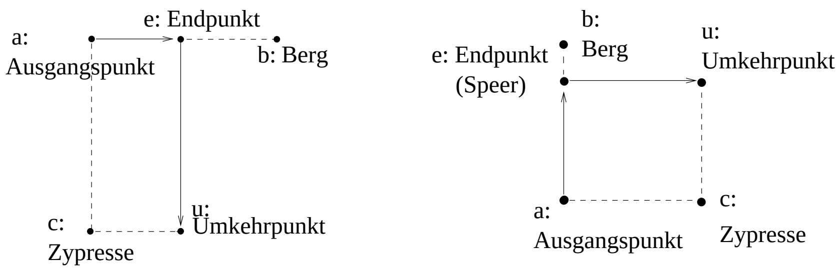


Abbildung 1.3: Mögliche Realisierungen von CSP a,b,c,e,u

tion zu kennen braucht. Dies ist ein wesentlicher Vorteil auch für künstliche Systeme, denn dadurch lassen sich Programme für Schlußfolgerung und Selbstlokalisation unabhängig voneinander implementieren, und das logische Schließen funktioniert auch, wenn Positionsbestimmungen unpräzise geworden sind, etwa nach ausgedehnten Bewegungsphasen (vgl. [Sci99]. Drittens wird zusätzlich die Anzahl der erforderlichen Relationen (und damit die Komplexität des Kalküls) erheblich eingeschränkt. Da die meisten Schlußfolgerungen im QRS nur auf der relativen Lage der Objekte zueinander basieren, kann auf ein absolutes Referenzsystem fast ohne Verlust von Information verzichtet werden. Entsprechend sind viertens viele Fragestellungen in der Tat unabhängig von der absoluten Position, vor allem dann, wenn die Ergebnisse selbst relative Lokalisationen sind. Als ***relative Lokalisation*** wird dabei jede Lokalisierung eines Zielobjekts c in Bezug auf ein Referenzsystem bezeichnet, das nicht absolut gegeben ist, sondern von den Orten der übrigen Objekte abhängt und durch sie definiert wird.
Typisch für relative Lokalisation ist die Beschreibung der Relationen durch Gleichheit von Punkten im Raum, und durch relative Richtungen, also durch Winkel zwischen den Punkten. Außerdem werden der relative Abstand, also das Verhältnis des Abstandes $dist(a,b)$ zu $dist(a,c)$ und Kombinationen von beiden auftreten. Die Relation "zwischen" kann beispielsweise dadurch beschrieben werden, daß der Winkel $\measuredangle cba = 0$ ist, und $dist(a,c) < dist(a,b)$ gilt. Diese Bestimmung der Relationen durch Gleichungen und Ungleichungen liefert eine semantische Interpretation der rein formalen Beschreibung $\{\ sc\ \}(a,b:c)$.
Ein Kalkül, in dem alle Relationen relative Lokalisationen darstellen, will ich ein ***rst-Kalkül*** nennen. Die Buchstaben stehen für ***relative spatial treatment*** .

Ein Kalkül besteht im einfachsten Fall nur aus einer endlichen Anzahl solcher Relationen, die jeweils durch ein Relationssymbol bezeichnet werden.
In praktischen Fällen kommen häufig mehrere solcher ***Basisrelationen*** als Relation für ein Punktetripel in Frage. Beispielsweise läßt die Beschreibung "seitlich" offen, ob es sich um die Relation "direkt rechts" $r(ight)l(ateral)$ oder

"direkt links" $\mathsf{l(eft)l(ateral)}$ handelt. Deshalb werden Kalküle in dem Sinn vervollständigt, daß auch komplexe, aus mehreren Basisrelationen ***zusammengesetzte Relationen*** in ihm enthalten sind. "Seitlich" wird also durch $\{\mathsf{rl},\ \mathsf{ll}\}$ formal beschrieben. Die Semantik einer solchen zusammengesetzten Relation $\{r_1, \ldots, r_m\}$ ist dabei die Vereinigung aller enthaltenen Basisrelationen, also $\bigcup_{i=1}^{m} r_i$. Da die meisten Folgerungen mehrere Möglichkeiten offenlassen, welche Basisrelation gilt, und um jede beliebige solche Ungewißheit ausdrücken zu können, betrachtet man im Allgemeinen vollständige Relationenalgebren:

Definition 1 (vollständige Kalküle) *:*
*Ein Kalkül mit der Basisrelationenmenge $\mathcal{B}(K)$ heißt **vollständig** , falls es jede Unsicherheit über den Basisrelationen ausdrücken kann, also wenn gilt: Der Kalkül enthält beliebige Vereinigungen von Basisrelationen als Relation. Ich bezeichne die Vervollständigung $\mathfrak{P}(\mathcal{B}(K))$ von K mit $(K)^{\cup}$. $(K)^{\cup}$ ist der kleinste vollständige Kalkül mit $(K)^{\cup} \supset \mathsf{K}$.*

Jeder Kalkül läßt sich vervollständigen, indem man es unter Vereinigung abschließt. Wenn nicht anders angegeben, seien im folgenden alle Kalküle vollständig.

Wie helfen nun solche Kalküle, die richtigen Schlüsse zu ziehen? Aus relativen Lokalisierungen lassen sich neue ableiten. Hat man eine Relation über einem Tripel definiert, so folgen daraus die Relationen für Permutationen der Rollen Ziel-, Start- und Referenzpunkt. Beispielsweise läßt aus $\{\ \mathsf{rl}\ \}(a, b : c)$ ableiten, daß der Berg seitlich links von ihm liegt, wenn Ogg auf die Zypresse schaut (Relation $\{\ \mathsf{ll}\ \}(a, c : b)$). Diese Art der Ableitung, bei der eine Relation über Permutationen des Tripels abgeleitet wird, heißen Transformationen. Mehrere solcher relativer Lokalisierungen lassen sich zusammensetzen (***komponieren***) zu Relationen über neuen Tripeln. Auch wenn wir noch nichts direkt über das Tripel $(a, c : e)$ erzählt bekommen, so reicht die vorhandene Information $\{\ \mathsf{rl}\ \}(a, b : c)$, $\{\ \mathsf{sc}\ \}(a, b : e)$ aus, um
$\{\ \mathsf{ll}\ \}(a, c : e)$
abzuleiten. Ein Kalkül besteht aus solchen Ableitungen als rein formalen Operationen (für Vereinigung, Schnitt, Transformationen und Kompositionen) auf den Relationen. Ein Beispiel für eine Transformationsoperation die soeben eingeführte Konvertierungsoperation CONV, die $\{\ \mathsf{rl}\ \}(a, b : c)$ auf $\mathrm{CONV}(\mathsf{rl})(a, c, b) = \{\ \mathsf{ll}\ \}(a, c : b)$abbildet. Ein weiteres Beispiel ist die Relation INV, die $\{\ \mathsf{ll}\ \}(a, e : c)$ auf $\{\ \mathsf{CONV}(\ \mathsf{ll}\ )\ \}(e, a : c)$ abbildet. Sie gibt an, unter welcher Relationen Ogg die Zypresse (den Punkt c) sieht, wenn er vom Endpunkt der gegangenen Strecke e auf seinen Ausgangspunkt a zurückblickt. Weil die Referenzrichtung dabei umgedreht wird, heißt diese Operation Invertierung. Da es insgesamt 6 Permutationen zwischen 3 Punkten gibt, gibt es auch 6 mögliche zugehörige Transformationsoperationen, die in einem Kalkül auftreten können.
Die Semantik der Transformationsoperationen sei dabei:

Definition 2 (Transformationsoperation einer Relation) *:*
Sei R *eine Relation und* $\pi \in \mathfrak{S}_3$ *(symmetrische Gruppe mit 3 Elementen). Dann besteht ihre* ***transformierte Relation*** R^π *aus allen Basisrelationen, die als Relation zwischen dem Tripel* $\pi(a, b, c)$ *auftreten können, wenn* $\pi(a, b, c)$ *ein Tripel ist, das* R *erfüllt.*

Die sechs Transformationsoperationen sind in Tabelle 1.3 aufgeführt und in Abbildung 1.4 dargestellt.

Permutation	Operation	Operations-symbole	=	Resultierende Relation	Argumente der resultierenden Rel.
(1)(2)(3)	Identität	ID (R)	=	R	$(a_1, a_2 : a_3)$
(12)(3)	Inversion	INV (R)	=	R^{12}	$(a_2, a_1 : a_3)$
(23)(1)	Konversion	CONV (R)	=	R^{23}	$(a_1, a_3 : a_2)$
(13)(2)	Reversion	REV (R)	=	R^{13}	$(a_3, a_2 : a_1)$
(231)	Rotation	ROT (R)	=	R^{231}	$(a_2, a_3 : a_1)$
(321)	Inversion	TOR (R)	=	R^{321}	$(a_3, a_1 : a_2)$

Tabelle 1.1: Erklärung der Schreibweise für Operationen und die aus ihnen resultierenden Relationen

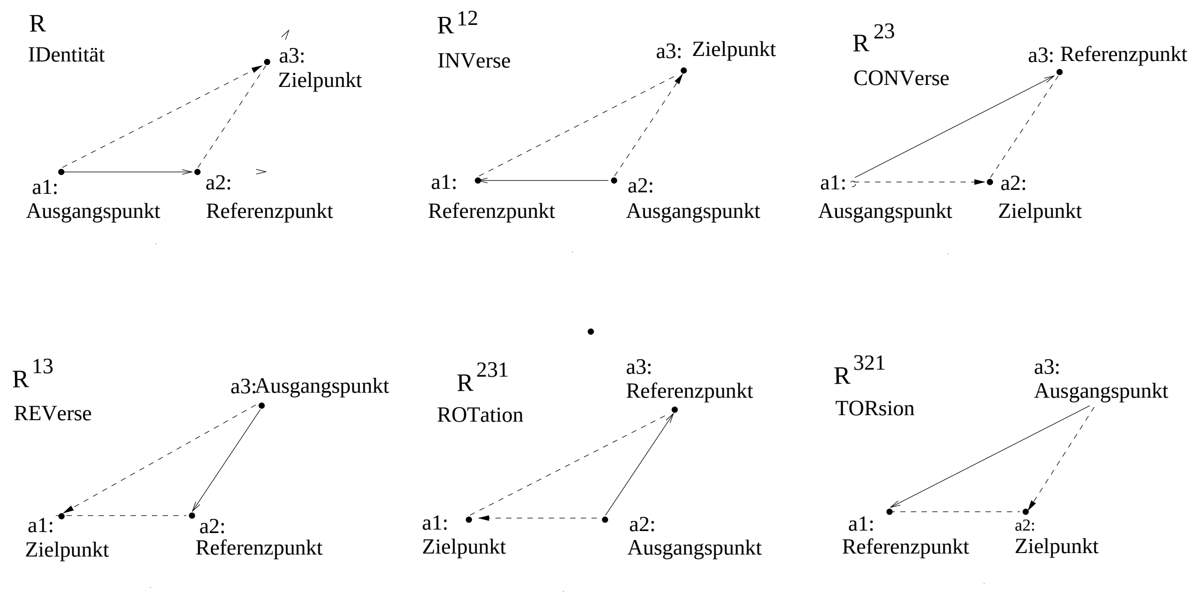


Abbildung 1.4: Die 6 Transformationsoperationen entsprechen wie dargestellt den Permutationen ihrer Elemenete.

Diese Semantik legt in einem gegebenen Kalkül die Bilder unter ID; INV; etc. fest. Dieser Abbildung von Mengen entspricht eine syntaktische Abbildung der Relationssymbole. Dabei soll die Syntax eines formalen Kalküls so

definiert sein, daß sie den tatsächlichen semantischen Zusammenhängen in einer Interpretation der Relationen und Operatoren des Kalküls entspricht. Als diesem Modell zugrundeliegendes Universum wird in dieser Arbeit stets $\mathbb{R}^2$ dienen, das heißt die Punkte werden durch Punkte im $\mathbb{R}^2$ instanziert und die Relationen sind Teilmengen des $(\mathbb{R}^2)^3$. Die üblicherweise verwendeten Operationen, also vor allem Permutation und Komposition, sind distributiv über der Vereinigung von Relationen. Deshalb lassen sich die resultierenden Relationen von zusammengesetzten Relationen aus den resultierenden von Basisrelationen durch Bildung der Vereinigung ableiten.
Zur Beschreibung eines Kalküls inklusive des zugrundeliegenden Modells gehört also die Angabe von 4 Aspekten:

1. die in ihm vorkommenden Relationssymbole (bei vollständigen Kalkülen genügt die Angabe der Basisrelationen),
2. die semantische Interpretation der ihnen entsprechenden Relationen,
3. die formalen Operationen,
4. Tabellen für die Ergebnisse unter den Operationen, mindestens auf den Basisrelationen.

Bei den Tabellen für die Ergebnisse unter den Operationen läßt sich der Speicheraufwand durch geschicktes Ausnutzen der Basis erheblich reduzieren. Denn wenn eine Operation o über der Vereinigung distributiert, was in den hier vorgestellten Kalkülen der Fall sein wird, genügt für sie die Angabe der Ergebnisse auf der Menge der Basisrelationen B. Denn dann ist

$$o(\bigcup_{i\in I_1} \mathsf{B}_i, \ldots, \bigcup_{i\in I_n} \mathsf{B}_i) = \bigcup_{i_1\in I_1} \cdots \bigcup_{i_n\in I_n} o(\mathsf{B}_{i_1}, \ldots, \mathsf{B}_{i_n})$$

Statt $(2^{|B|})^n$ Ergebnissen der Operation müssen so nur $|B|^n$ viele bestimmt werden, was in der Praxis eine beträchtliche Vereinfachung bedeutet.

Diese Tabellen lassen sich aufgrund der semantischen Repräsentation bestimmen. Diese Bestimmung ist relativ (rechen-)aufwendig, da im Grunde alle möglichen in den Relationen enthaltenen Tupel berücksichtigt werden müssen. In der Praxis läßt sich dieser Aufwand durch Ausnutzung von Stetigkeit und Symmetrieeigenschaften reduzieren. Sind die Tabellen einmal erstellt, können sie von dem Kalkül genutzt werden, so daß für eine Schlußfolgerung statt einer Vielzahl von Rechnungen nur ein einziges Nachschauen in der Tabelle nötig ist.
Dies ist der Grund, warum man verschiedenen Anwendungen entsprechende spezifische Kalküle einführt.

Kapitel 2

Grundbegriffe

Zunächst will ich die Kalküle SC und DC vorstellen, auf denen meine Überlegungen basieren, und an diesem Beispiel die in meiner Arbeit wichtigen formalen Kriterien einführen und die zentralen Begriffe definieren. Mit diesen Begriffen und Kriterien ausgerüstet, werde ich mein Ziel, ein hinsichtlich der formalen Eigenschaften praktikables Kalkül zu finden, am Ende dieses Kapitels konkret formulieren können.

Der grundlegende Begriff ist der des Kalküls bezeichnet in der Logik eine rein syntaktisch definierte Zusammenfassung von Ausdrücken, und Regeln, wie man aus einem Ausdruck einen neuen ableiten kann. [EFT96] Ich möchte in dieser Arbeit den Begriff präzisieren, indem ich in die Definition des Kalküls alle Bestandteile der Ausdrücke mit aufnehme. In meiner Arbeit sind neben den Ableitungsregeln (also der syntaktischen Seite der Schlußfolgerungen) vor allem die Relationen und die auf ihnen definierten Operationen maßgeblich für ein Kalkül.

2.1 Kalküle

Definition 3 (Kalkül) *:*
Ein **Kalkül**

$$\mathsf{K} = (\underline{L}, \underline{C}, V_C, \underline{R}, V_R, , O, \underline{O}, \Phi, \Sigma)$$

besteht aus
einer Menge $\underline{L}$ *von logischen Symbolen (mindestens falsum* $\perp$*, und Konjunktion* $\wedge$*),*
einer Menge $\underline{C}$ *von* **Konstantensymbolen** *,*
einer unendlichen Menge V_C *von* ***Variablen*** e_i *als Bezeichner für Elemente,*

einer Menge $\underline{R}$ *von* **Relationssymbolen** $\mathtt{r}, \mathtt{s}, \ldots$ *,*
einer Menge V_R *von Relationsvariablen* R_i *für Relationen,*
einer Menge O *von* ***Operatoren*** o*, das sind Abbildungen von* $\underline{R}^n$ *nach* $\underline{R}$*,*
der zugehörigen Menge $\underline{O}$ *der Operationssymbole,*
einer Menge Φ *von* ***Aussagen*** ϕ*,das sind Zeichenketten über diesen Symbolen,*
und einer Menge Σ *von* **Ableitungsregeln** *, das sind geordnete Paare von Aussagen. Für jede Aussage* $\phi \in \Phi$ *gelte* $(\phi, \phi) \in \Sigma$

Dabei sind genau die Aussagen in Φ*, die mit den folgenden Bildungsgesetzen konstruiert werden können:*

$$\begin{array}{rcl} \perp & \in & \Phi \\ \mathsf{R}(e_1, \ldots, e_k) & \in & \Phi, \quad \textit{falls } \mathsf{R} \in (\underline{R} \cup V_R),\ e_i \in (\underline{C} \cup V_C) \end{array}$$

Wenn σ_1, σ_2 *Zeichenketten über* $\underline{L} \cup \underline{C} \cup V_C \cup \underline{R} \cup V_R \cup \underline{O}$ *sind, so daß* $\sigma_1 \mathsf{R} \sigma_2 \in \Phi$*, und* o *ein k-stelliges Operationssymbol ist, dann kann man* R *durch* $o(\mathsf{R}_1, \ldots \mathsf{R}_k)$ *ersetzen, d. h. , es gilt auch*

$$\sigma_1 o(\mathsf{R}_1, \ldots \mathsf{R}_k)\sigma_2 \in \Phi, \quad \textit{falls } \mathsf{R}_i \in \underline{R} \cup V_R$$

wenn die Stelligkeit von $o(\mathsf{R}_1, \ldots \mathsf{R}_k)$ *mit der von* R *übereinstimmt. Dabei heißen die Relationen* $\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_k$ ***Operandenrelationen*** *.*
Weiterhin

$$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_m \quad \in \quad \Phi, \quad \textit{falls } \phi_1, \ldots, \phi_m \in \Phi.$$

Wenn weitere logische Symbole im Kalkül enthalten sind, gibt es zusätzlich entsprechende Bildungsregeln für Aussagen, die dieses Symbol enthalten.[1]
Eine Aussage ϕ_m *heißt* ***ableitbar*** *aus einer anderen* ϕ_1 $(\phi_1 \vdash_{\mathsf{K}} \phi_m)$*, falls es eine endliche Folge von Ableitungsregeln* $(\phi_1, \phi_2), (\phi_2, \phi_3), \ldots (\phi_{m-1}, \phi_m) \in \Sigma$ *gibt.*
Ein Kalkül, für den $\underline{R}$ *endlich ist, heißt endlich. Variablen und Konstanten werde ich als Elemente* [2] *bezeichnen. Ein Kalkül, der nur Relationen der Stelligkeit* k *besitzt, heißt* $k-$*stelliger Kalkül.*

Die Bedingung $(\phi, \phi) \in \Sigma$ bedeutet, daß ϕ aus sich selbst folgt. Ziel ist es, alle Aussagen zu bestimmen, die in einem Kalkül aus einer anderen folgen.
In allen in dieser Arbeit untersuchten Kalkülen wird $\underline{L} = \{\perp, \wedge\}$ sein, d. h. , es wird keine zusätzlichen logischen Symbole geben. Mittels der Konjunktion werden in einem Kalkül Aussagen möglich, die Teilaussagen über mehrere Tripel zu einer Gesamtaussage zusammenfassen. Dadurch kann ausgedrückt

[1] Dieser Fall wird in meiner Arbeit nicht auftreten.
[2] In fast allen Kalkülen meiner Arbeit kommen keine Konstanten vor, dann sind alle Elemente Variablen.

werden, daß mehrere Beziehungen gleichzeitig gelten sollen. Falsum $\perp$ füge ich ein, um Inkonsistenz klar ausdrücken zu können. Eine Aussage heißt inkonsistent, wenn $\perp$ aus ihr folgt.
Typische Ableitungsregeln in einem Kalkül sind die ***Schnittregel***

$$(\mathsf{R}_1(e_1, \dots, e_k) \wedge \mathsf{R}_2(e_1, \dots, e_k) \ ; \quad (\mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2)(e_1, \dots, e_k))$$

mit der verschiedene Aussagen über die gleichen Tupel zusammengefaßt werden, die ***Konversion***

$$(CONV(\mathsf{R})(a, c, b) \ ; \quad \mathsf{R}(a, b, c))$$

mit der implizite Information durch Transformation explizit gemacht wird, und

$$(\mathsf{R}_1(e_1, \dots, e_k) \wedge \mathsf{R}_2(f_1, \dots, f_k) \ ; \quad \mathsf{R}_1(e_1, \dots, e_k))$$

mit der Einzelaussagen extrahiert werden können.

Diese rein syntaktische Definition soll sich an einer mit semantischen Inhalten gefüllten Vorstellung orientieren. Eine solche semantische Interpretation der Relationen ist durch ein Modell gegeben.

Definition 4 (Modell) *:*
Jedes ***Modell*** $\mathfrak{M} = (U, \mathcal{I})$ *über einem Kalkül besteht aus einem Wertebereich (Universum U) und einer Interpretation $\mathcal{I}$ der Relations- und Konstantensymbole. Diese* ***Interpretation*** *ist eine Funktion auf den Relations- und Konstantensymbolen $R \cup C$, deren Funktionswerte Teilmengen von U^k sind, wobei k die Stelligkeit der* ***Relation*** *ist, beziehungsweise $k = 1$ bei Konstantensymbolen.*

Beispiel 1 (Gleichheitskalküle) [3] *:*
Der **binäre Gleichheitskalkül** $\mathsf{Eq}_2(\mathbb{R}^2)$ *ist beschrieben durch*

$$\begin{array}{lll} \underline{L} := \{\wedge, \perp\}, & \underline{C} := \{\mathbb{R}^2\}, & V_C := \{v_n | n \in \mathbb{N}\}, \\ \underline{R} := \{=, \neq, ?\}, & V_R := \emptyset, & \underline{O} := \{\breve{}^{\,un\ddot{a}r},\ o^{bin\ddot{a}r}\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rrclrcl} O := \{ & \breve{}: \quad \underline{r} & \mapsto & \underline{r}, & & & \\ & o: \quad (=, \underline{r}) & \mapsto & \underline{r}, & (\neq, =) & \mapsto & \neq, \\ & (\neq, neq) & \mapsto & ?, & (\neq, ?) & \mapsto & ?, \\ & (?, \underline{r}) & \mapsto & ? & | \ \underline{r} \in \underline{R}\} & & \end{array}$$

[3] Die Syntax versteht man am besten, wenn man parallel dazu das Modell betrachtet, vgl. Tabelle 2.1 auf S. 18.

$$\begin{array}{lcccl}
(a,b,c) & \in & \overline{\mathsf{R}}^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \notin \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}, \\
(a,b,c) & \in & (\mathsf{R} \cup \mathsf{S})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}} \text{ oder } (a,b,c) \in \mathsf{S}^{\mathfrak{M}}, \\
(a,b,c) & \in & (\mathsf{R} \cap \mathsf{S})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}} \text{ und } (a,b,c) \in \mathsf{S}^{\mathfrak{M}}. \\
(a,b,c) & \in & \emptyset^{\mathfrak{M}} & & \text{für kein Tripel } (a,b,c) \\
(a,b,c) & \in & \top^{\mathfrak{M}} & & \text{für alle } a,b,c \\
(b,a,c) & \in & INV(\mathsf{R})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}, \\
(a,c,b) & \in & CONV(\mathsf{R})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}, \\
(c,b,a) & \in & REV(\mathsf{R})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}, \\
(b,c,a) & \in & ROT(\mathsf{R})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}, \\
(c,a,b) & \in & TOR(\mathsf{R})^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b,c) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}, \\
(a,b,c) & \in & \mathsf{R} \circ \mathsf{S}^{\mathfrak{M}} & \Longleftrightarrow & \exists x : (a,b,x) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}} \text{ und } (b,x,c) \in \mathsf{S}^{\mathfrak{M}}.
\end{array}$$

Tabelle 2.1: Die wichtigsten, häufig auftretenden Operationen und ihre Interpretationen. Die übrigen Operationen werden später erklärt

$$\begin{array}{lllll}
\Sigma := \{ & (\varphi_1 \wedge \varphi_2 & ; & \varphi_2 \wedge \varphi_1), & \wedge \textit{ kommutiert.} \\
& (\varphi_1 \wedge \varphi_2 & ; & \varphi_1), & \textit{Extraktion von Aussagen.} \\
& (\varphi & ; & \varphi \wedge x = x), & x = x \textit{ gilt immer.} \\
& (\varphi & ; & \varphi \wedge x?y), & x?y \textit{ gilt immer.} \\
& (\varphi \wedge x \neq x & ; & \bot), & x \neq x \textit{ ist Widerspruch.} \\
& (\varphi \wedge \bot & ; & \bot), & \textit{enthält Widerspruch} \rightarrow \textit{inkonsistent} \\
& (\varphi \wedge x\underline{r}y & ; & \varphi \wedge y\breve{\underline{r}}x), & \textit{Konversion} \\
& \multicolumn{3}{l}{(\varphi \wedge x\underline{r}_1 y \wedge y\underline{r}_2 z;\ \ \varphi \wedge x o(\underline{r}_1, \underline{r}_2) z)} & \textit{Komposition} \\
& \multicolumn{4}{l}{\mid \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi;\ \ \underline{r} \in \underline{R};\ \ x, y, z \in C \cup V_C\}}
\end{array}$$

Die Relation $\breve{}$ *heißt Konversion. Ihre Semantik besteht darin, zu jeder Relation die Relation zu liefern, die einer Vertauschung der Elemente entspricht. Die Relation o heißt Komposition.*

Das Standardmodell des binären Gleichheitskalküls ist $\mathfrak{Eq}\ _2(\mathbb{R}^2)$ *mit*

$$\begin{array}{llcll}
U := \mathbb{R}^2, & & & & \\
\mathcal{I} := \{ & = & \mapsto & \{(a;a) \mid a \in \mathbb{R}^2\}, & \\
& \neq & \mapsto & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 - \{(a;a) \mid a \in \mathbb{R}^2\}\}, & \\
& ? & \mapsto & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, & \\
& c \in C & \mapsto & c & \}.
\end{array}$$

Beispiel 2 (ternärer Gleichheitskalkül) *:*
Der binäre Gleichheitskalkül ist eingebettet in den ternären Gleichheitskalkül $\mathsf{Eq}_3(\mathbb{R}^2)$. *Dieser ist beschrieben durch*

$$\begin{array}{ll} L := \{\wedge, \perp\}, & C := \{\mathbb{R}^2\}, \quad V_C := \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \underline{R} := \mathfrak{P}(\{\mathfrak{eq}, \mathfrak{e}_{12}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{e}_{23}, \mathfrak{neq}\}), & \\ V_R := \emptyset, & O := \{INV, CONV, REV, ROT, TOR\}, \end{array}$$

Σ ist so gewählt, daß es alle allgemeingültigen Schlüsse als Ableitungregel enthält, beispielsweise, daß $(x,x,x) \in \mathfrak{eq}$ immer gilt, $(x,y,z) \in \mathfrak{e}_{12} \iff (x,z,y) \in \mathfrak{e}_{23}$ etc.

$$\begin{array}{lll} \Sigma := \{ & (\varphi_1 \wedge \varphi_2; & \varphi_2 \wedge \varphi_1), \\ & (\varphi_1 \wedge \varphi_2; & \varphi_1), \\ & (\varphi \wedge \perp; & \perp), \\ & (\varphi; & \varphi \wedge \{\ \mathfrak{eq}\ \}(x, x : x)), \\ & (\varphi; & \varphi \wedge \{\ \mathfrak{eq},\ \mathfrak{e}_{12}\ \}(x, x : y)), \\ & (\varphi; & \varphi \wedge \{\ \mathfrak{eq},\ \mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{13},\ \mathfrak{e}_{23},\ \mathfrak{neq}\ \}(x, y : z)), \\ & (\varphi \wedge INV\ \ \mathsf{R}\ (y, x : z); & \varphi \wedge\ \mathsf{R}\ (x, y : z)), \\ & (\varphi \wedge CONV\ \ \mathsf{R}\ (x, z : y); & \varphi \wedge\ \mathsf{R}\ (x, y : z)), \\ & (\varphi \wedge REV\ \ \mathsf{R}\ (z, y : x); & \varphi \wedge\ \mathsf{R}\ (x, y : z)), \\ & (\varphi \wedge ROT\ \ \mathsf{R}\ (y, z : x); & \varphi \wedge\ \mathsf{R}\ (x, y : z)), \\ & (\varphi \wedge TOR\ \ \mathsf{R}\ (z, x : y); & \varphi \wedge\ \mathsf{R}\ (x, y : z)), \\ & (\varphi \wedge \{\ \mathfrak{e}_{13}\ \}(x, x : y); & \perp), \\ & (\varphi \wedge \{\ \mathfrak{e}_{23}\ \}(x, x : y); & \perp), \\ & (\varphi \wedge \{\ \mathfrak{neq}\ \}(x, x : y); & \perp), \\ & \mid \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi; \mathsf{R} \in \underline{R}, x, y, z \in C \cup V_C\} & \end{array}$$

Das Standardmodell des ternären Gleichheitskalküls $\mathfrak{Eq}_{\ 3}(\mathbb{R}^2)$ ist

$$\begin{array}{llllll} U := \mathbb{R}^2, & & & & & \\ \mathcal{I} := \{ & \{\mathfrak{eq}\} & \mapsto & \{(r;r;r) & \mid & r \in \mathbb{R}\}, \\ & \{\mathfrak{e}_{12}\} & \mapsto & \{(r;r;s) & \mid & r \neq s \in \mathbb{R}\}, \\ & \{\mathfrak{e}_{13}\} & \mapsto & \{(r;s;r) & \mid & r \neq s \in \mathbb{R}\}, \\ & \{\mathfrak{e}_{23}\} & \mapsto & \{(r;s;s) & \mid & r \neq s \in \mathbb{R}\}, \\ & \{\mathfrak{neq}\} & \mapsto & \{(r;s;t) & \mid & r \neq s \neq t \neq r \in \mathbb{R}\}, \\ & c \in C & \mapsto & \quad c & & \quad\quad\quad\quad \} \end{array}$$

In diesen Gleichheitskalkülen kann man aussagen, daß bestimmte Elemente gleich anderen oder gleich bestimmter reellwertiger Punkte in der Ebene sind. Ist $\underline{C} = \emptyset$, so kann man nur Aussagen über die Gleichheit von Elementen untereinander machen, aber nicht darüber, wo sie liegen. Das Modell $\mathfrak{Eq}_{\ 3}(\emptyset)$ ist dann invariant z. B. unter Translation, Drehstreckung, und sogar unter beliebigen injektiven Abbildungen der Punkte der Ebene. Im folgenden betrachte ich nur solche Kalküle und ihre Modelle, und schreibe einfacher $\mathfrak{E}q$ für $\mathfrak{Eq}_{\ 3}(\emptyset)$

Definition 5 (Instantiation) *:*
*Aussagen ϕ werden **instanziert** durch eine **Instantiation** θ, das ist eine Zuordnungen von den in ϕ vorkommenden Variablen auf ihren* **Wertebereich (domain)** *$W \subseteq U$.*

Eine besondere Klasse von Aussagen sind Konstellationen: Dies sind Aussagen, in denen keine Relationsvariablen vorkommen. Da dann alle Relationen definiert sind, kann man die Operationen in ihnen auswerten. In allen in dieser Arbeit betrachteten Kalkülen treten als logische Symbole nur $\{\wedge, \perp\}$ auf, und es kommen keine Konstanten vor. Daher kann man jede Konstellation als Konjunktion von atomaren Aussagen der Form $(e_1, \ldots, e_k) \in \mathsf{R}$, $(\mathsf{R} \in R, e_i \in V_C)$ begreifen:

Definition 6 (Konstellation) *:*
*Eine **Konstellation** $C = (E, R)$ besteht aus einer endlichen Menge $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ von* **Elementen** *und* **Relationen zwischen ihnen. R ist dabei eine endliche Folge von Relationen aus $\underline{R}$, so daß klar ist, welche Relation sich auf welches Tupel von Elementen bezieht.**

Beispiel:
$(\{e_1, e_2, e_3, e_4\},\ \{e_1 \neq e_2,\ e_3 = e_4,\ e_4 = e_3\})$ ist eine Konstellation des binären Gleichheitskalküls.
Speziell in Kalkülmodellen, deren Relationenmenge R unter Schnitt abgeschlossen ist, macht es wenig Sinn, wenn sich auf ein Tupel $e_1, \ldots, e_k$ mehrere Relationen beziehen, da man diese durch ihren Schnitt ersetzen kann.

Definition 7 (voller Kalkül) *:*
In einem **vollen Kalkül** *ist die Stelligkeit aller Relationen gleich einer natürlichen Zahl k und Φ besteht genau aus den Konstellationen, in denen für jedes k-Tupel $\in E^k$ genau eine Relation definiert wird. Die Bedeutung einer Konstellation C ist dabei die Aussage*

$$\bigwedge_{(e_1,e_2,\ldots,e_k)\in E^k} \mathsf{R}^{C}_{e_1 e_2 \ldots e_k}(e_1, e_2, \ldots, e_k).$$

Statt $\mathsf{R}^{C}_{e_1 e_2 \ldots e_k}(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ schreibe ich auch $\mathsf{R}^{C}_{1 \ldots k}(e_1, \ldots, e_k)$. Für $k = 3$ werde ich alternativ die Schreibweise $\mathsf{R}^C\ (e_1, e_2 : e_3)$ verwenden bzw. einfach $\mathsf{R}\ (e_1, e_2 : e_3)$, falls dadurch keine Unklarheiten auftreten können.

Instanzen des vollen Kalküls können einem Computer in einfacher Weise eingegeben werden. E und R werden dann als Folgen eingegeben. Etwa bezeichne

$(E = (e_1; e_2; e_3; e_4);\ \ R = (?;\ \neq;\ ?;\ ?;\ ?;\ ?;\ ?;\ ?;\ ?;\ ?;\ ?;\ =;\ ?;\ ?;\ =;\ ?))$
die oben beschriebene Beispielkonstellation; zu lesen als

$$R = (e_1?e_1;\ \ e_1 \neq e_2;\ \ e_1?e_3;\ \ e_1?e_4;\ \ e_2?e_1; \ldots ;\ \ e_4 = e_3;\ \ e_4?e_4)$$

Wenn die Stelligkeit k des Kalküls bekannt ist, kann die Eingabe von E entfallen, da anhand der Länge $|R|$ von R automatisch E als $e_1, \ldots , e_{|R|^{\frac{1}{k}}}$ interpretiert wird.

Im folgenden sei, soweit nichts anderes gesagt wird, immer ein voller Kalkül vorausgesetzt.

Definition 8 (Interpretation, Realisation, Modell von C) *:*
Eine Instantiation θ einer Konstellation heißt ***Realisation*** *in einem Modell $\mathfrak{M}$, wenn alle Relationen realisiert sind. Dabei heißt eine Relation R* ***realisiert*** *durch θ (oder durch die Werte e_i^θ), wenn für ihre Elemente e_i gilt, daß $(e_1^\theta, \ldots , e_k^\theta) \in \mathsf{R}^{\mathfrak{M}}$. Das Bild E^θ der Instantiation heißt dann auch Modell von C= (E, R).*

Beispiel:
$e_1 = e_3 = e_4 = (0; 0), e_2 = (1; 0)$ ist ein Modell der obigen Beispielkonstellation für den binäre Gleichheitskalkül.
Eine Konstellation besteht also aus einer Menge von Relationen. Man kann sie sich vorstellen als eine Menge von Bedingungen zwischen den Elementen, die festlegen, wie die Elemente insgesamt zueinander stehen. In jedem Kalkülmodell beschreibt eine Konstellation daher ein Constraint Satisfaction Problem **CSP**, das ist das Problem, realisierende Werte $e^\theta \in U$ zu finden für jedes $e \in E \in C$, so daß alle Relationen in C gleichzeitig realisiert sind. Instanzen in Modellen mit Universum $U = \{wahr,\ \ falsch\}$ heißen ***Formeln*** . Eine ***Belegung*** β ist eine ***Instantiation*** mit Wertebereich $\{$*wahr*, *falsch* $\}$.

Definition 9 (Komponenten) *:*
Komponenten *C sind Teilmengen von Konstellationen I,* ***Modellkomponenten*** *$\mathfrak{C}$ sind Teilmengen von Modellen von I. Eine Komponente* ***erreicht*** *eine Aussage (in einem gegebenen Modell), wenn in allen entsprechenden Modellkomponenten, die sie realisieren, die Aussage gilt.*

Definition 10 (Erfüllbarkeit) *:*
Eine Konstellation heißt **erfüllbar** *(in einem Modell $\mathfrak{M}$), genau dann, wenn es ein Modell von ihr gibt. Eine Konstellation heißt konsistent oder widerspruchsfrei, in einem Kalkül K, genau dann, wenn kein Widerspruch, also keine Aussage der Form $\perp$ abgeleitet werden kann.*

Ein Kalkül K zusammen mit einem Modell $\mathfrak{M}$ heißt ***Kalkülmodell*** $\mathfrak{K}$ (oder einfach Kalkül), wenn die Interpretation zu der Syntax paßt im folgenden Sinn: Man kann in K aus ϕ nur Aussagen ableiten, die gelten, wenn ϕ gilt (***Korrektheit***), und jede solche Aussage ist ableitbar (***Vollständigkeit***):

$$\begin{array}{lll} \phi \vdash_{\mathsf{K}} \psi & \Longrightarrow & (\mathfrak{M} \models \phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi) \quad \text{Korrektheit} \\ \phi \vdash_{\mathsf{K}} \psi & \Longleftarrow & (\mathfrak{M} \models \phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi) \quad \text{Vollständigkeit} \end{array}$$

Anmerkung:
Kalküle und Konstellationen sind syntaktische Begriffe; Gültigkeit, Belegung, Instantiation, Realisierung und Kalkülmodelle sind semantische Begriffe, sie beziehen sich immer auf ein Modell mit festem Universum U. Im folgenden werde ich den Begriff Kalkül aber auch für das entsprechende Standard-Kalkülmodell mit Universum $U = \mathbb{R}^2$ verwenden, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Definition 11 (Teilkalkül) *:* $\mathsf{K}' = (\underline{L}', \underline{C}', V_C{}', \underline{R}', V_R{}', O', \underline{O}', \Phi', \Sigma')$ *heißt Teilkalkül von*

$$\mathsf{K} = (\underline{L}, \underline{C}, V_C, \underline{R}, V_R, O, \underline{O}, \Phi, \Sigma),$$

falls gilt:

$$\begin{array}{lllllll} \underline{L}' & = & \underline{L}, & & & & \\ \underline{C}' & = & \underline{C}, & & V_C{}' & = & V_C, \\ \underline{R}' & \subseteq & \underline{R}, & & V_R{}' & = & V_R, \\ \underline{O}' & \subseteq & \underline{O}, & & & & \\ \Phi' & = & \Phi\lceil\underline{R}'\lceil\underline{O}', & & \Sigma' & = & \Sigma\lceil\Phi', \end{array}$$

und für O' gelte: Zu $o' \in O'$ existiert $o \in O$, sodaß o das gleiche Operationssymbol hat wie o' und falls $\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_n \in R'$, $o(\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_n) \in R'$, dann $o'(\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_n) = o(\mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_n)$
Beachte: In den zugehörigen Kalkülmodellen werden Konstantensymbole und Relationen $\underline{r} \in (\underline{R} \cap \underline{R}')$ gleich interpretiert.

Ein Teilkalkül entspricht also dem Kalkül, von dem er abgeleitet ist, bis auf die Tatsache, daß es weniger Relationen und Operationen in ihm gibt, und die Operationen dort vom Oberkalkül abweichen dürfen, wenn andernfalls ihr Ergebnis nicht definiert wäre.

Beispiel:
Im folgenden werde ich immer annehmen, daß alle Relationen eine feste Stelligkeit k haben. Dann erhält man aus einem Kalkül einen speziellen Teilkalkül durch folgende Definition.

Definition 12 (Basis und Basiskalkül) *:*
*Eine minimale Menge $B \subseteq R$ von Relationen, die alle anderen Relationen durch Vereinigung erzeugt, heißt **Basis** und ihre Elemente heißen Basisrelationen. Wenn es in einem Kalkül eine solche Menge gibt, so können Relationen **zusammengesetzt** (**komplex**) sein, dann sind sie die Vereinigung von mehreren **Basisrelationen** . Sind in einem Kalkül die Relationen als Vereinigung der Basisrelationen gegeben oder ist die Basis eindeutig, so werde die Basis mit $B(\mathsf{K})$ oder mit $B(\underline{R})$ bezeichnet.*
Der Kalkül

$$\mathsf{B}(K) := (\underline{L}, \underline{C}, V_C, B(\underline{R}), V_R, O_B, \underline{O}_B, \Phi_B := \Phi\restriction B\restriction(\underline{O})_B, \Sigma\restriction\Phi_B)$$

*heißt **Basiskalkül** von K.*
O_B bezeichne dabei die Menge der Operatoren o, deren Einschränkung auf B einen Wertebereich $o(B) \subseteq B$ hat.

Ein Kalkül

$$\mathsf{B}^\top(\mathsf{K}) := (\underline{L}, \underline{C}, V_C, B(\underline{R}) \cup \{\top\}, V_R, O^\top, \underline{O}^\top, \Phi^\top, \Sigma^\top)$$

mit einer zusätzlichen Relation $\top$, die allgemeiner als jede Relation ist, also mit

$$\begin{array}{rcl} \Phi^\top & \supset & \Phi \cup \{\top e_1, \ldots, e_k \mid \underline{r} \in \underline{R}\}, \\ \Sigma^\top & \supset & \Sigma \cup \{(\underline{r}(e_1, \ldots, e_k); \top(e_1, \ldots, e_k) \mid \underline{r} \in \underline{R}\}), \\ & & (\top(e_1, \ldots, e_k); \underline{r}e_1, \ldots, e_k) \notin \Sigma^\top \text{ (für alle } \underline{r} \in \underline{R}) \\ \text{und } B(\mathsf{K}) & \subseteq & \mathsf{B}^\top(\mathsf{K}) \end{array}$$

*heißt **erweiterter Basiskalkül** von K.*
Im zugehörigen Kalkülmodell gelte $\mathcal{I}(\top) = U^k$

Anmerkung:
Der erweiterte Basiskalkül unterscheidet sich vom Basisikalkül also nur durch die zusäztliche Relation $\top$, für die gefordert wird, daß man nichts aus ihr ableiten kann, d. h. , daß sie totale Unwissenheit über die Beziehung eines Tupels bedeutet.
In der Regel gibt es eine natürliche Fortsetzung der Operationen in O auf $B(\mathsf{B}^\top)$, etwa für die Operation Schnitt $\cap$ gelte $(\mathsf{R} \cap \top) = (\top \cap \mathsf{R}) = \mathsf{R}$.
e Vereinigungsoperation $\cup$ kommt im Basiskalkül nicht vor, es sei denn alle Relationen sind paarweise Teilmenge oder Obermenge zueinander, was in meiner Arbeit nicht vorkommen wird.
Anstelle der Komposition, die im Basiskalkül in der Regel nicht definiert ist, ist es sinnvoll, die Operation $⋒(\mathsf{R}, \mathsf{S}, \mathsf{T}) := (\mathsf{R} \circ \mathsf{S}) \cap \mathsf{T}$ in R zu definieren,

deren Einschränkung auf $B(\mathfrak{K})$ immer definiert ist, da das Ergebnis stets $\top$ oder $\emptyset$ ist.[4]

Bemerkung 13 (Existenz der Basis) :
1. Jeder endliche Kalkül besitzt eine Basis
2. Nicht alle unendlichen Kalküle besitzen eine Basis

Beweis:
1. $\underline{R}_0 := \underline{R}$ erzeugt $\underline{R}$. Folgende Konstruktion liefert eine Basis: Starte mit $i = 0$. Falls es keine Relation r gibt, so daß $\underline{R}_i \setminus \{r\}$ ganz $\underline{R}$ erzeugt, so ist $\underline{R}_i$ Basis, andernfalls wähle ein $r_i \in R_i$, so daß $\underline{R}_{i+1} := \underline{R}_i \setminus \{r_i\}$ ganz $\underline{R}$ erzeugt. Da sich $\underline{R}_i$ jedesmal verkleinert, aber nur aus endlich vielen Elementen besteht, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab.
2. Das Kalkülmodell mit den Relationen $\underline{R} = \{\underline{(m;n)} | m, n \in \mathbb{N}\}$ und

$$\mathcal{I}(\underline{(m;n)}) = \{\ ]a,b[\ \mid a = m \cdot 2^{-n}, b = (m+1)2^{-n}\}$$

hat keine Basis.
Denn angenommen, B sei Basis und $\underline{(m;n)} \in B$. Sei etwa

$$\underline{(2m, n+1)} = \bigcup_{i \in I_1} b_{1i}$$

und

$$\underline{(2m+1, n+1)} = \bigcup_{i \in I_2} b_{2i},$$

als Vereinigung von Basisrelationen, so ist

$$\underline{(m,n)} = \bigcup_{i \in I_1} b_{1i} \cup \bigcup_{i \in I_2} b_{2i},$$

also erzeugt auch $B \setminus \underline{(m;n)}$ ganz $\underline{R}$, d. h. B war nicht minimal im Widerspruch zur Annahme.

$\Box$(Bemerkung 13)

Definition 14 (ternärer Kalkül) :
Eine dreistelliger Kalkül K *heißt auch ternärer Kalkül. Seine Relationen sind also Mengen von Tripeln* (e_1, e_2, e_3)*. Das erste Element* e_1 *heißt* ***Startelement, start element*** *, das zweite* e_2 ***Referenzelement, pivot element,***

[4]Strenggenommen ist dann das Basiskalkül kein Teilkalkül mehr, da die Operation $\Cap$ im ursprünglichen Kalkül nicht definiert ist. Sie ist aber als Komposition definierter Operationen definierbar, und das rechtfertigt für unsere Zwecke ihre Verwendung.

und e_3 heiße ***Zielelement, goal element*** *. Die* ***Position*** $0 < \kappa \leq 3$ *eines Elements e_κ in einer Relation einer Konstellation ist die Stelle, an der es auftritt, also.beispielsweise* 1*, falls es Startelement ist, oder* 3*, falls es als Zielelement auftaucht.*
Als Standardmodell $\mathfrak{K}$ bezeichne ich das Modell, bei dem das Universum die Menge $\mathbb{R}^2$ ist, das heisst, jede Instantiation eines CSP kann als Zuordnung der Elemente auf Punkte der Ebene aufgefaßt werden. In zugehörigen Realisationen θ mit $p_i = e_i^\theta$ heiße entsprechend p_1 Startpunkt, p_2 Referenzpunkt und p_3 Zielpunkt. Die Strecke $[p_1, p_2]$ werde als **Referenzstrecke** *bezeichnet und die Gerade $\ell(p_1, p_2)$, auf der sie liegt, als* **Referenzgerade***.*

Ich schreibe $\{\ \mathsf{R}\ \}(a, b : c)$ gleichbedeutend mit $(a, b, c) \in \mathsf{R}$ dafür, daß die Relation R von dem Tripel (a,b,c) erfüllt wird.

In dieser Arbeit werde ich dreistellige Kalküle untersuchen, für die gilt:

$$\underline{L} = \{\wedge, \perp\}, \quad \underline{C} = \emptyset, \quad R = \emptyset.$$

Das bedeutet, daß alle auftretenden Aussagen Konstellationen sind.

Typische, immer wieder auftretende Operatoren sind (vgl. Tabelle 2.1):

Die Operationen heißen Vereinigung, Schnitt, Freksa-Komposition, steife Kompositionen; Zylindrifikationen, Inversion, Konversion, Reversion, Rotatation, Torsion, (diese letzten fünf heißen Transformationsoperationen)Komplement, ; Diagonalrelation, leere und universelle Relation. In allen Kalkülmodellen $\mathfrak{M}$ in dieser Arbeit gelte dabei die Semantik aus Tabelle 2.1.:

Interpretationen können als Punkte der Ebene aufgefaßt werden. Dabei gelte für die Interpretation der Operationen: $U = \mathbb{R}^2$

Diese Begriffe werden nun etwas klarer, wenn ich die Kalküle vorstelle, von denen ich ausgegangen bin.

2.2 Der Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{SC}$

Ausgehend von der Beobachtung, daß wir Menschen bei Richtungen vor allem unterscheiden können, ob Objekte links oder rechts und ob sie vor uns, genau seitlich von uns oder hinter uns liegen, entwickelte Christian Freksa in [Fre92] ein Kalkül, der unterscheidet zwischen den 8 Richtungen direkt vorne (straight forward = 0), rechts vorne (right front = 1), direkt seitlich rechts (right neutral = 2), rechts hinten (right back = 3), direkt hintern (straight

back = 4), links hinten (left back = 5), direkt seitlich links (left neutral = 6), links vorne (left front = 7). Dieser Kalkül definiert also Relationen nur für Tripel, bei denen alle drei Punkte paarweise verschieden sind.
Dabei werden die Richtungen gemäß dem relative spatial treatment -Prinzip als Richtung der Strecke (bc) zur Blickrichtung (ab) festgelegt, etwa als Beschreibung dessen, wie man abbiegen muß, um von a über b nach c zu gelangen (vgl. Abbildung 2.1). Auf diese Weise können längere Streckenbeschreibungen als Folge solcher Richtungswechsel beschrieben werden. [Fre92] interessiert sich nun dafür, wie dieses Wissen benutzt werden kann, um Abkürzungen zu finden.

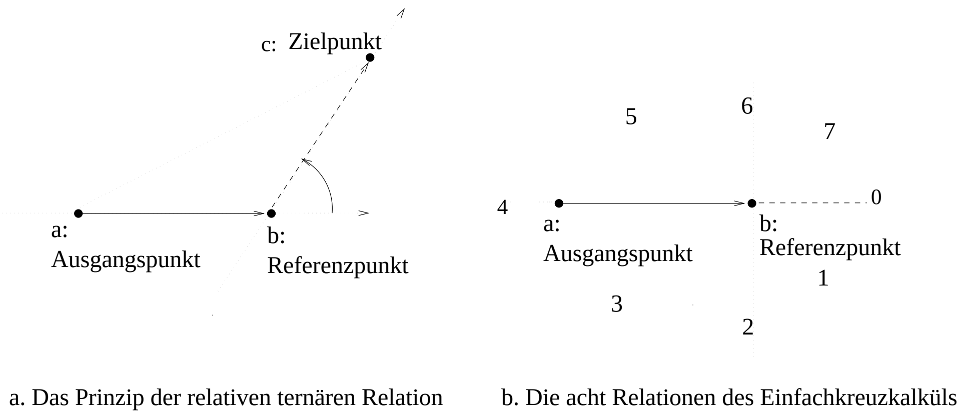


Abbildung 2.1: Prinzip der Relationen des Einzelkreuzkalküls $\mathfrak{SC}$

Formal wird der Einzelkreuzkalkül beschrieben durch folgende Beschreibung:

Beispiel 3 **($\mathfrak{SC}$)** *:*
*Der **Einzelkreuzkalkül** $\mathfrak{SC}$ ($\mathfrak{SC}$ kommt vom englischen Single Cross) ist das Kalkülmodell bestehend aus*
den logischen Symbolen $L = \{\wedge, \perp\}$;
den Konstanten und Variablen $C = \emptyset$; $V_C = e_1, e_2, e_3, \ldots$;
den Relationen $R = \mathfrak{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7\})$
über dem Universum $U = \mathbb{R}^2$ *mit Interpretation* $\mathfrak{SC}$, *so daß*
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{\mathsf{R}\}^{\mathfrak{SC}}$, *falls* $\exists n \in \mathsf{R}: \ (a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{n\}^{\mathfrak{SC}}$, *wobei*
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{0\}^{\mathfrak{SC}}$ *(direkt vorne), falls* $b^\theta \in \ ]a^\theta, c^\theta[$
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{1\}^{\mathfrak{SC}}$ *(rechts vorne), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta \in \ ]90^o, 180^o[$
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{2\}^{\mathfrak{SC}}$ *(direkt rechts), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta = 90^o$
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{3\}^{\mathfrak{SC}}$ *(rechts hinten), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta \in \ ]0^o, 90^o[$
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{4\}^{\mathfrak{SC}}$ *(direkt hinten), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta = 0^o$
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{5\}^{\mathfrak{SC}}$ *(links hinten), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta \in \ ]-90^o, 0^o[$
$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{6\}^{\mathfrak{SC}}$ *(direkt links), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta = -90^o$

$(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \in \{7\}^{\mathfrak{SC}}$ *(links vorne), falls* $\measuredangle a^\theta b^\theta c^\theta \in \ ]-180^o, -90^o[$,
den Operationen $= \{\cup, \cap, INV, CONV, REV, ROT, TOR, \circ\}$ *(Vereinigung, Schnitt, Inversion, Konversion, Reversion, Rotatation, Torsion und Komposition)*
Dabei gelte für die Interpretation die in Tabelle 2.1 vorgestellte Semantik.
Die Ableitungsregeln entsprechen genau den semantischen Regeln, wie sie für die Operationen definiert sind, wobei die Regel für die Komposition als Tabelle gegeben ist, beispielsweise

$$\begin{array}{rl} ((a,b,c) \in \mathsf{R} & ;(a,c,b)CONV(\mathsf{R})) \\ (\in (a,c,b)CONV(\mathsf{R}) & ;(a,b,c) \in \mathsf{R}) \\ ((a,c,b) \in \mathsf{R} \wedge (a,b,c) \in \overline{\mathsf{R}} & ;\perp) \end{array}$$

Zusätzlich existieren die Ableitungsregeln der Prädikatenlogik und noch die folgende ***Schnittregel*** *und* ***Inkonsistenzregel*** *:*

$$\begin{array}{rcc} ((a,b,c) \in \mathsf{R} \wedge (a,b,c) \in \mathsf{S} & ; & (a,b,c) \in \mathsf{R} \cap \mathsf{S}) \\ (a,b,c) \in \emptyset & ; & \perp) \end{array}$$

Eine Regel für die Vereinigung existiert nicht, da durch Vereiningung die abgeleiteten Modelle nur gröser werden.

Damit erkennt der Kalkül $\mathfrak{SC}$ triviale Inkonsistenz (wenn die leere Menge auftaucht) und leitet Schlüsse durch Anwenden von Permutationen, Schnitt und Komposition $\circ$ ab.

2.2.1 Die Bedeutung der Basis

$\mathfrak{SC}$ ist vollständig, da als Potenzmenge seiner Basisrelationen
$\mathcal{B}(\mathfrak{SC}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ gegeben. Seine Operationen distributieren wie wir noch sehen werden, über die Vereinigung – d. h. es gilt

$$\forall r \in \underline{R}: \ o(\bigcup_{i \in I} r_i, \ r) = \bigcup_{i \in I} o(r_i, r),$$

genügt es, sie auf den Basisrelationen zu definieren.

Daß es sich bei dieser Menge tatsächlich um eine Basis handelt, d. h. , daß man auf keine Relation verzichten kann, folgt daraus, daß diese Relationen in $\mathfrak{SC}$ paarweise disjunkt sind. Dabei genügt schon die aus der Disjunktheit folgende Eigenschaft, daß die Relationen keine nichttrivialen Teilmengen haben:

Bemerkung 15 (Kriterium für Basiskalkül) *:*
Wenn in $\mathfrak{K}$ *für je zwei Relationen* $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2 \in \underline{R}$ *stets* $\subseteq \mathsf{R}_2 \Rightarrow r_1 = \emptyset$*,gilt, dann existiert die Basis und es ist* $B(\mathfrak{K}) = \underline{R}$.

Beweis:
Für jedes $r \in \underline{R}$ gilt: $\underline{R} \setminus \{r\}$ erzeugt nicht $\underline{R}$. Denn da es in $\underline{R} \setminus \{r\}$ keine Relation s gibt mit $s \subseteq r$, kann r nicht Vereinigung von Relationen aus $\underline{R} \setminus \{r\}$ sein.

□(Bemerkung 15)

Ein weiterer Vorteil disjunkter Basen ist, daß es dann für jedes Tripel höchstens eine Basisrelation in einem Kalkül $\mathfrak{K}$ gibt, die es erfüllt. Sie werde, wenn sie existiert, als $Rel_{\mathfrak{K}}(a,b,c)$ bezeichnet. Beispielsweise ist $Rel_{\mathfrak{SC}}(\,(0;0)),\ (1;0),\ (2;0)\,)$ $=\ \{\mathfrak{sf}\}$ Allerdings ist $Rel_{\mathfrak{SC}}(\,(0;0)),\ (1;0),\ (1;0)\,) =?$ in $\mathfrak{SC}$ nicht definiert. Damit jede Konstellation beschreibbar ist, benötigt man Kalkülmodelle, sodaß jedes Tupel in einer Relation des Kalküls steht, und damit diese Beschreibung eindeutig ist, sollten die Basisrelationen dabei disjunkt sein.

Definition 16 (erschöpfender Kalkül, JEPD-Basis) *:*
Ein Kalkül(modell) heißt ***erschöpfend*** *, genau dann, wenn alle Relationen Stelligkeit k haben und jedes Element von U^k (mindestens) eine Relation* R *realisiert.Es heißt* ***disjunkt erzeugbar*** *, wenn es eine Basis aus paarweise disjunkten Relationen gibt.*
Ein erschöpfender, disjunkt erzeugbarer Kalkül heißt ***JEPD-Kalkül*** *und seine Basis heißt* ***JEPD-Basis*** *(JEPD steht für „jointly exhaustive and pairwise disjoint“).*

Beispiel 4 ($\mathfrak{SC}$,$\mathsf{B}^\top(\mathsf{K})$) *:*
$\mathfrak{SC}$ *ist disjunkt erzeugbar, denn die Basisrelationen*
$$\mathsf{B} \in \mathcal{B}(\mathfrak{SC}) = \{\mathsf{0},\mathsf{1},\mathsf{2},\mathsf{3},\mathsf{4},\mathsf{5},\mathsf{6},\mathsf{7}\ \}$$
sind paarweise disjunkt definiert. Allerdings ist $\mathfrak{SC}$ *nicht erschöpfend und damit kein JEPD-Kalkül.*
Für jeden Kalkül K *mit fester Stelligkeit ist* $\mathsf{B}^\top(\mathsf{K})$ *erschöpfend, denn jedes Element von U^k ist durch $\top$ realisiert. Aber auch $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{SC})$ ist kein JEPD-Kalkül, denn $\top$ ist (nach dem folgenden Erschöpfungskriterium) Basisrelation und mit keiner anderen Basisrelation disjunkt.*

Auf vollständige disjunkt erzeugbare Kalküle kann man Resultate der universellen Algebra anwenden, beispielsweise sind solche Kalküle unter Schnitt und Mengendifferenz abgeschlossen.[Grä79]
Wird ein Tupel durch irgendeine Relation erfüllt, dann schon durch eine Basisrelation:

Lemma 17 (Erschöpfungskriterium) *: Ein k-stelliges Kalkülmodell $\mathfrak{K}$ ist erschöpfend* $\Longleftrightarrow$ $\bigcup B(\mathfrak{K}) = U^k$

Beweis:
Die Rückrichtung ist trivial. Für die Hin-Richtung, wähle ein beliebiges Element $t \in U^k$. Weil $\mathfrak{K}$ erschöpfend ist, wird es realisiert, etwa durch $\bigcup A = r \in \underline{R}$, wobei $A \subseteq B(\mathfrak{K})$. Also existiert eine Basisrelation $a \in A$, die t realisiert.

□(Lemma 17)

Anmerkung:
Unter einer Abbildung α geht ein Kalkülmodell $\mathfrak{K} = (\mathsf{K},\ U, \mathcal{I})$ über in das Kalkülmodell $\alpha(\mathfrak{K}) = (K, \alpha(U), \alpha \circ \mathcal{I})$, das ebenballs ein Modell des gleichen Kalküls K ist. Unter injektiven Abbildungen werden Basen so abgebildet, daß sie wieder Basen sind.[5] Daher bleibt unter injektiven Abbildungen die Eigenschaft, disjunkt erzeugbar zu sein, erhalten. Unter surjektiven Abbildungen auf U bleibt die Eigenschaft, erschöpfendes Kalkülmodell zu sein, erhalten.

Definition 18 (At($\mathfrak{K}$)) *:*
Eine Relation $R^{\mathfrak{M}}$ in einem Kalkülmodell $\mathfrak{M}$ heißt ***atomar*** *, falls $S^{\mathfrak{I}} \subseteq R^{\mathfrak{M}} \Rightarrow S = R$ gilt. Die Menge der atomaren Relationen in $\mathfrak{K}$ werde mit $At(\mathfrak{K})$ bezeichnet.*

Bemerkung 19 (At($\mathfrak{K}$)$\subseteq B(\mathfrak{K})$) *:*
Atomare Relationen sind immer Basisrelationen.

Beweis:
Ich führe den Beweis indirekt. Sei c keine Basisrelation, sondern komplex. Dann gibt es eine Basisrelation $b \subsetneqq c$, denn c ist Vereinigung von Basisrelationen. Damit ist aber c nicht atomar.

□(Bemerkung 19)

Anmerkung:
Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Denn z. B. die für die k-stellige Relationenalgebra mit den Relationen

$$\underline{R} = \{r_n := \{\overset{k}{a} \mid \ || \overset{k}{a} || \leq 2^{-n}\} \mid n \in N \subseteq \mathbb{N}\}$$

ist $B(\underline{R}) = \underline{R}$. Denn keine Relation ist Vereinigung von anderen, da alle eine Kette von echten Teilmengen bilden, weswegen es keine atomare Relation gibt. Dabei sei $|| \cdot ||$ eine beliebige Norm.

---

[5] Unter beliebigen Abbildungen folgt zwar aus $\mathsf{R} = \bigcup_{i \in I} b_i$, daß $\alpha(\mathsf{R}) = \bigcup_{i \in I} \alpha(b_i)$, aber es kann der Fall eintreten, daß zwei verschiedene Basisrelationen mit $\mathcal{I}(b_1) \neq \mathcal{I}(b_2)$ auf die gleiche Menge $\alpha \circ \mathcal{I}(b_1) \neq \alpha \circ \mathcal{I}(b_2)$ abgebildet wird, dann geht die Minimalität der ursprünglichen Basis verloren.

Bemerkung 20 (At($\mathfrak{K}$)=B($\mathfrak{K}$) in disjunkt erzeugbaren Kalkülen) *:*
In disjunkt erzeugbaren Kalkülen gilt auch die Umkehrung: Basisrelationen sind atomar.

Beweis:
Sei b eine Basisrelation, und r eine beliebige Relation. Dann gilt $r = \bigcup A$ für eine Menge $A \subseteq B$ von Basisrelationen. Entweder gilt $b \in A$, dann ist $b \subseteq r$, oder $b \notin A$, dann ist $b \cup r = \emptyset$, weil alle Basisrelationen paarweise disjunkt sind. Also ist b Atom.

$\square$(Bemerkung 20)

Insbesondere in Kalkülen mit JEPD-Basis sind die Basiselemente genau die Atome.

Korollar 21 (Eindeutigkeit der disjunkten Basis) *:*
In disjunkt erzeugbaren Kalkülmodellen gibt es bis auf Anordnung nur eine Basis.

2.2.2 Die Operationen

Die Operationen des Kalküls dienen dazu, neues Wissen aus vorhandenen Informationen abzuleiten. Obwohl die Relationen nur qualitativ sind, d. h. , ungenaues Wissen repräsentieren, lassen sich durch Ableitung Schlußfolgerungen ziehen. Beispielsweise schränkt die Kenntnis der Richtung bc in Bezug auf ab, wie sie durch die Relationen von $\mathfrak{SC}$ bestimmt werden, die Möglichkeiten für die abkürzende Richtung ac in Bezug auf ba ein. Die von C. Freksa untersuchte Transformationsoperation INV beschreibt diesen Zusammenhang. Tabelle 2.2.2 ist eine von mir erstellte Erweiterung der von Freksa vorgestellten Permutationstabelle auf alle im vorigen Abschnitt definierten Transformationsoperationen.

Die Gültigkeit der Tabelle auf der Grundlage der Semantik $\mathbb{R}^2$ ergibt sich aus geometrischen Sätzen über die Winkel im Dreieck, beispielsweise dem Winkelsummensatz. Da die Streckenverhältnisse zwischen den Punkten nicht festgelegt sind, ist für einige Relationen die resultierende Relation von INV und anderen Permutationen eine aus mehreren Basisrelationen zusammengesetzte Relation.

Operation:					
ID	INV	REV	CONV	ROT	TOR
resultierende Relation:					
R	R^{12}	R^{13}	R^{23}	R^{231}	R^{321}
{0}	{4}	{0}	{4}	{4}	{4}
{1}	{5}	{7}	{5}	{3}	{3}
{2}	{5}	{6}	{5}	{3}	{3}
{3}	{5,6,7}	{5}	{5,6,7}	{1,2,3}	{1,2,3}
{4}	{0,4, undef. }	{4}	{0,4, undef. }	{0,4, undef. }	{0,4, undef. }
{5}	{1,2,3}	{3}	{1,2,3}	{5,6,7}	{5,6,7}
{6}	{3}	{2}	{3}	{5}	{5}
{7}	{3}	{1}	{3}	{5}	{5}

Tabelle 2.2: Die Transformationsoperationen von SC

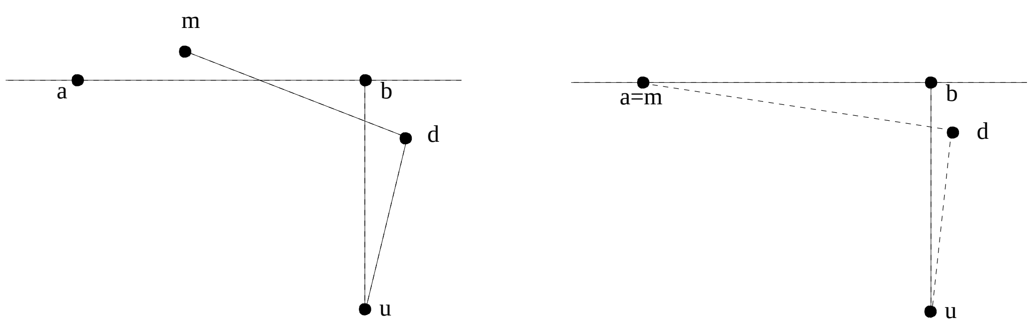


Abbildung 2.2: Mögliche Realisierungen des CSP a,b,u,d,m (Oggs Weg)

Betrachten wir nun als Beispiel eine Repräsentation von Oggs Weg im Einzelkreuzkalkül (vgl. Abbildung 2.2)

$$\{\ 2\ \}(a,b:u),\quad \{\ 5\ \}(b,u:d),\quad \{\ 6\ \}(u,d:m)$$

Wo kann m nun in Bezug auf die Richtung ab liegen? Freksas Kalkül beinhaltet die für solche Fragestellungen nötige Kompositionsoperation.

Definition 22 (Freksa-Komposition) *:*
C. Freksa *definiert die Komposition $r \circ s$ von zwei Relationen r für ein Tripel (a,b,c) und s für (b,c,d) als die Menge aller Basisrelationen für das Tripel (a,b,d), die mit $\{\ r\ \}(a,b:c)$ und $\{\ s\ \}(b,c:d)$ konstistent sind, d. h. , für die es ein c gibt, welches beide Relationen realisiert.*

Die Komposition ist nur definiert, wenn so wie beim obigen Beispiel Referenz- und Zielpunkt der ersten Relation mit dem Start- bzw. Referenzpunkt der zweiten Relation zusammenfallen. Denn dadurch enthalten beide ein gemeinsames

Paar, nämlich (b, c), mit dessen Hilfe die in Bezug auf die beiden Operanden vorhandene Information zu einer neuen Information eingebunden werden kann. Falls aber nur ein Punkt oder gar kein Punkt in beiden Operanden gemeinsam auftritt, sind die Informationen über relative Richtungen völlig unabhängig voneinander. (Dies folgt aus der in Kapitel 4, Satz 80 bewiesenen analogen Eigenschaft für beliebige rst-Kalküle.)

Die in diesem Sinne definierte Komposition läßt sich nur dann mehrfach nacheinander ausführen, wenn man die letzten beiden Relationen eines Pfades zuerst miteinander komponiert und dann die Komposition schrittweise nach vorne durchzieht (backward chaining). Denn geht man von vorne nach hinten durch, haben die resultierenden Relationen nur noch einen Punkt gemeinsam, und entsprechen nicht der formalen Beschreibung der Komposition $\circ$. Im obigen Beispiel des Pfads von Ogg ergäbe eine Komposition $\{\ \mathtt{2}\ \}(a, b : u) \circ \{\ \mathtt{5}\ \}(b, u : d)$ eine Relation $\{\ \mathtt{7}\ \}(a, b : d)$, aber dann lassen die Relationen für (a, b, d) und (u, d, m) keine Komposition im Sinne Freksas mehr zu. Daraus ergibt sich, daß die Frage, ob das Assoziativgesetz gilt, in Freksas Kalkül gegenstandslos ist.

Zur Bestimmung der Kompositionstabelle für die Komposition $\circ$ benötigt Freksa in seinem Kalkül auch die Invertierung. Die Richtungsänderung von Richtung ab nach bd, die die resultierende Relation über (a, b, d) festlegt, ergibt sich als Summe der Richtungsänderungen ab nach bc und bc nach bd. Dabei wird zwar die erste durch Relation $\mathtt{R}$ direkt eingegrenzt, aber die zweite ergibt sich nicht direkt aus Relation $\mathtt{S}$, denn $\mathtt{S}$ wird ja bestimmt von der Richtungsänderung bc nach cd. Allerdings beschreibt die invertierte Relation $\mathtt{S}^{12}$ die Richtungsänderung von der umgekehrten Richtung cb nach bd. Diese ist genau 180^o(oder als Relation: $\{\mathtt{4}\}$) weniger als die gesuchte Richtungsänderung von bc nach bd, so daß $\mathtt{m} \circ \mathtt{n} = \mathtt{m} \dotplus \mathtt{n}^{12} \dotplus 4 \mod 8$, wobei

$$\{\mathtt{m}\} \dotplus \{\mathtt{n}\}^{12} := \left\{ \begin{array}{ll} \{\mathtt{m} + \mathtt{n}\} & \text{wenn } m \text{ oder } n \text{ gerade} \\ \{m + n - 1, m + n, m + n + 1\} & \text{wenn } m \text{ und } n \text{ unger.} \end{array} \right\}$$

Die Werte der Relationen sind genau so benannt, daß die Relationen $\{\mathtt{0}\}$, $\{\mathtt{2}\}$, $\{\mathtt{4}\}$, $\{\mathtt{8}\}$, die exakten Winkeln entsprechen, sich wie die zugehörigen Winkel zu allen Relationen (modulo 360^o) addieren. Aus Stetigkeitsgründen liegen die Kompositionen über den Relationen $\{\mathtt{1}\}$, $\{\mathtt{3}\}$, $\{\mathtt{5}\}$, $\{\mathtt{7}\}$, die 90^o-Winkelbereichen entsprechen, jeweils dazwischen, was den Bereich möglicher Relationen in der Formel erklärt. (vgl. [Fre92]).

2.3 Informationserhalt

Der Sinn der Angabe einer zusammengesetzten Relation als Permutation oder Komposition besteht darin, die Unbestimmtheit zu repräsentieren, die möglicherweise aus der Ausgangsinformation folgt. Ich will nun genauer betrachten, welche Arten von Unbestimmtheit man durch Anwenden dieser Permuationen erhält.

Ein Kalkül heißt bekanntlich ***korrekt*** , wenn alle Ableitungen in ihm derart sind, daß in jedem Modell, in dem die Prämisse gilt, auch die abgeleitete Aussage gilt. Dabei schränken korrekte Folgerungen die Anzahl der in Frage kommenden Modelle ein, man gewinnt präziseres Wissen. Im Idealfall kann ein Kalkül das gesamte in den Ausgangsinformationen implizit steckende Wissen explizit machen. Ein solcher Kalkül heißt ***ableitungsvollständig*** . Das bedeutet, daß ein korrekter und ableitungsvollständiger Kalkül genau die Aussagen ableiten kann, die in allen Realisierungen der Menge der Ausgangsinformationen gelten.
Da die Operationen der Kalküle dazu dienen, diese Ableitungen zu beschreiben, liegt es nahe, entsprechende Anforderungen auch an die einzelnen Ableitungsregeln zu stellen, und an die in ihnen benutzten Operationen. In dieser Arbeit betrachte ich Kalküle des qualitativen räumlichen Schließens, in denen die Konstantenmenge $C = \emptyset$ ist. Daher können Aussagen über Tupel nur auf der Ebene der Relationen gemacht werden. Insbesondere können in JEPD-Kalkülen Tupel in der gleichen Basisrelation nicht durch eine explizite Aussage unterschieden werden. Das Ergebnis einer Operation ist per Definition wieder eine Relation des Kalküls. Indem man als Operationsergebnis die Vereinigung aller Relationen definiert, in denen basierend auf der Semantik Tupel der transformierten bzw. komponierten Relation liegen, kann man in (vereinigungs)vollständigen Kalkülen stets erreichen, daß die Ableitungen korrekt sind. Die syntaktische Definition bildet sozusagen eine Obermenge der semantischen Definition. ***schwache Definition***
Möglicherweise ist aber die durch Permutation und Komposition abgeleitete Folgerung zu allgemein, nämlich wenn Relationen abgeleitet werden, welche zwar vorkommen können, die aber Tripel enthalten, die nicht in einem der Ausgangsinformation entsprechenden Modell realisiert sein können. Um zu bestimmen, ob die gefolgerte Relation tatsächlich in allen Fällen genau die Tripel beschreibt, die mit der Ausgangsinformationen konsistent sind, muß man untersuchen, ob die angewandten Operationen als Folgerungen informationserhaltend im folgenden Sinn sind:

Definition 23 (informationsgleich, vollständige Operation) *:*
Zwei Beschreibungen in einem Kalkül sind ***informationsgleich*** *, falls sie die gleichen Modelle haben, d. h. , wenn die gleichen Punktmengen sie realisie-*

ren. Eine Folgerung $(\varphi;\psi)$ heißt ***informationserhaltend*** *, wenn φ und ψ informationsgleich sind.*
Eine Operation o in einem Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt ***vollständig*** *, falls für jede Wahl von Relationen für die Operanden gilt: Jede Instantiation der als Ergebnis definierten Relation realisiert diese Relation, genau dann, wenn sie konsistent mit den Operanden ist, das heißt, wenn es eine Erweiterung auf die in den Operanden vorkommenden Elemente gibt, die gleichzeitig alle Operandenrelationen realisiert.*

Die Folgerungen, die man in einem Kalkül ziehen kann, sind informationserhaltend, wenn die Semantik aller Operationen, die bei Folgerungen verwendet werden, informationserhaltend ist, und wenn das Kalkül für diese Gruppe von Operationen korrekt und vollständig ist, das heißt, daß für jede Instanz der Operation die Menge der Tupel, welche konsistent mit den Operandenrelationen ist, wieder genau eine Relation des Kalküls bilden, nämlich das Ergebnis der Operation.

Beispiel 5 (Schnitt) *:*
Der Schnitt von Relationen ist vollständig, wenn die Relationen unter der Schnittmengenoperation abgeschlossen sind.

Beweis:
Sei $\mathsf{R} \cap \mathsf{S} = \mathsf{T}$ Da die in den Ausgangsrelationen R und S enthaltenen Elemente die selben sind, wie in der Ergebnisrelation T, und $\{\ \mathsf{T}\ \}(a,b:c) :\Longleftrightarrow$ $\mathsf{R}\ (a,b:c) \wedge\ \mathsf{S}\ (a,b:c)$, ist jede Realisation $\mathsf{T}\ (a^{\mathfrak{I}},b^{\mathfrak{I}}:c^{\mathfrak{I}})$ eine mit R und S konsistente Erweiterung von sich selbst, und jedes in R *und* S liegende Tripel realisiert auch T.

$\square$(Beispiel 5)

Das bedeutet, durch den Schnitt kommt keine zusätzliche Unbestimmtheit hinzu. Tatsächlich geht durch den Schnitt auch keine Information verloren, denn die Semantik ist informationserhaltend: Wenn man folgern kann, daß in jedem Modell einer Instanz C $\mathsf{R}\ (a,b:c)$ gilt, und daß $\mathsf{S}\ (a,b:c)$ gilt, so folgt daraus, daß in jedem Modell von C der Schnitt $\mathsf{T}\ (a,b:c)$ gilt.
Aus diesem Grund wird der Schnitt in jeder Folgerung zugelassen.

Da die Operationen (schwache) Permutation und Komposition als korrekte Operationen so definiert sind, daß die syntaktische Definition eine Obermenge der semantischen Definition liefert, genügt es für den Nachweis der Vollständigkeit von Permutation und Komposition, die andere Inklusion zu prüfen:

Definition 24 (Vollständigkeit einer Permutation) *:*
Eine Permutation $\mathsf{S} = \pi(\mathsf{R})$ *heißt vollständig, falls für jede Realisierung* $a^\theta, b^\theta, c^\theta)$ *von* S *das Tripel* $\pi^{-1}(a^\theta, b^\theta, c^\theta)$ *die Relation* R *erfüllt.*
Eine Transformationsoperation π *heißt* ***vollständig*** *, falls jede Permutation* $\mathsf{S} = \pi(\mathsf{R})$*, die sie definiert, vollständig ist.*

Definition 25 (Vollständigkeit einer Kompositionsoperation) *:*
Eine Komposition $\mathsf{S} = \mathsf{R}_1 \cdot \mathsf{R}_2$ *heißt vollständig, genau dann, wenn für jede Instantiation von* S *eine Erweiterung existiert, die gleichzeitig Instantiationen von* R_1 *und* R_2 *ist, wobei die Punkte, die sie mit den Instantiation von* S *gemeinsam haben, zusammenfallen.*
Eine Kompositionsoperation $\circ$ *heißt* **vollständig***, falls jede Komposition* $\mathsf{S} = \mathsf{R}_1 \circ \mathsf{R}_2$*, die sie definiert, vollständig ist.*

Damit die Folgerungen informationserhaltend sind, fordern wir von einem geeigneten Kalkül die folgenden

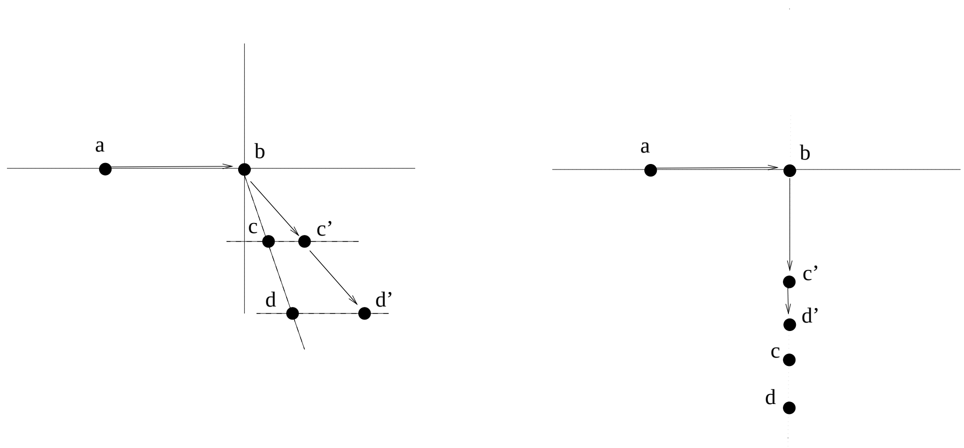
Definition 26 (Vollständigkeitseigenschaften) *:*
1. Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ *heißt* ***permutationsvollständig (permutation complete)*** *, falls jede Transformationsoperation vollständig ist.*
2. Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ *heißt* ***kompositionsvollständig (composition complete)*** *, falls Kompositionen von Relationen genau Relationen des Kalküls sind, d. h., als Kompositionen von Tripeln der zweiRelation ergeben sich genau die Tripel der resultierenden Relation.*

Erfüllt der Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ diese Forderungen?

Satz 27 (Vollständigkeitseigenschaften von $\mathfrak{S}\mathfrak{C}$**)** *:*
$\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ *ist kompositionsvollständig, aber nicht permutationsvollständig.*

Beweis:
<u>Permutationsunvollständigkeit:</u>
Die Transformationsoperationen $INV = T^{(12)}, CONV = T^{(13)}, ROT = T^{(231)}, TOR = T^{(321)}$ sind unvollständig, weil der Winkel, der R bestimmt, jeweils ein anderer ist als der, der $T^\pi(\mathsf{R})$ bestimmt. Beispielsweise gilt $\{5\} \subseteq \mathrm{INV}(\{3\})$, aber es existieren Tripel, die $\{5\}$ realisieren, aber die nicht Permutation eines $\{3\}$ realisierenden Tripels sind, z. B. $((0;0),(1;0),(0;1))$.
<u>Kompositionsvollständigkeit:</u>
Sei $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})\ (a, b : d)$. Also existieren c', d' mit $\mathsf{R}\ (a, b : c')$und $\mathsf{S}\ (b, c' : d')$

und $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$ $(a, b : d')$. Gesucht ist ein Punkt c, so daß R $(a, b : c)$ und S $(b, c : d)$. Es genügt, den Satz für $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$ Basisrelation zu beweisen, denn wenn er für alle Basisrelationen stimmt, dann erst recht für zusammengesetzte.



a. b, d’ und c’ liegen auf einer Geraden
d liegt nicht auf dieser.

b. b, d, d’ und c’ liegen auf einer Geraden

Abbildung 2.3: Skizze zum Beweis der Kompositionsvollständigkeit, 1. Fall

1. Fall: (S=$\mathsf{0}$ oder $\mathsf{S} = 4$), d. h. $d' \in \ell(b, c')$.
Dann wähle c so auf $\ell(c, d)$, daß (b, c, d) gleich geordnet ist wie (b, c', d'). (Vergleiche Abbildung 2.3)

2. Fall: $d' \notin \ell(b, c')$ und $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$ ist eine gerade Zahl.
Dann liegt d auf der gleichen Halbgerade durch b wie d'. Wähle c auf der gleichen Halbgeraden wie c' so, daß $\ell(c', d') || \ell(c, d)$. (Vergleiche Abbildung 2.4)

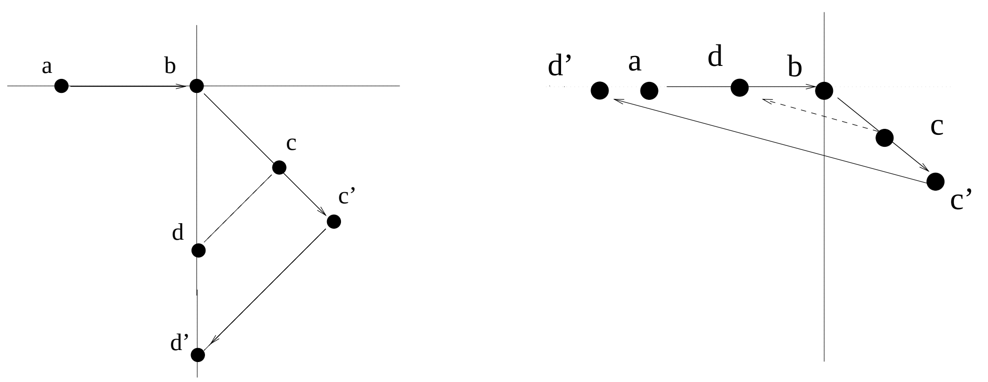


Abbildung 2.4: Skizze zum Beweis der Kompositiosvollständigkeit, 2. Fall

3. Fall: $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$ ist eine ungerade Zahl und (R=$\mathsf{0}$ oder R= 4), d.h. $c' \in \ell(a,b), d' \notin \ell(a,b)$.
Sei d_0 der Abstand von d zur Senkrechten zu ab durch b, und d'_0 der Abstand von d' zur Senkrechten zu ab durch b. Dann ist der Punkt c auf $\ell(b,a)$, der $\frac{d_0}{d'_0}$ -mal so weit von b entfernt ist wie c' eine Erfüllung. Denn durch eine Komposition einer geeignete Achsenstreckung parallel zu $\ell(a,b)$ und einer parallel zur Senkrechten zu $\ell(a,b)$ durch b, beide mit Zentrum in b, geht b in b über, $\ell(a,b)$ in sich selbst, c' in c und d' in d. Da dabei 0^o-Winkel, $\pm 90^o$-Winkel und 180^o-Winkel mit $\ell(a,b)$ als einem Schenkel in gleich große Winkel übergehen, und da außerdem die Abbildung als lineare Abbildung stetig ist, erhält sie also die Relationen S und $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$. (Vergleiche Abbildung 2.5)

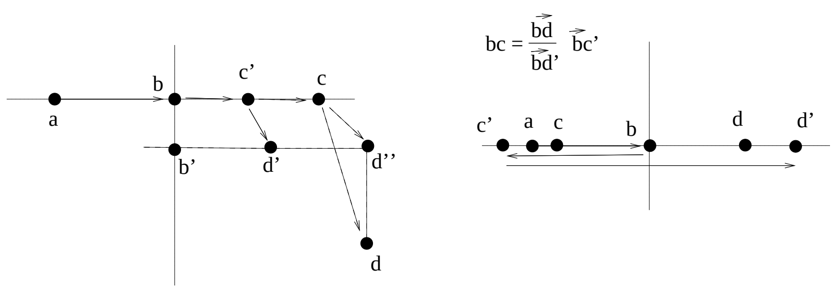


Abbildung 2.5: Skizze zum Beweis der Kompositionsvollständigkeit, 3. Fall: Anwendung der Achsenstreckungsinvarianz

4. Fall: $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$ ist eine ungerade Zahl und ($\mathsf{R}\neq\mathsf{0}$ und $\mathsf{R} \neq$ 4).
Zum Beweis nutze ich das folgende Lemma

Lemma 28 (Wimpellemma) *:*
1. Für $\forall a,b,d,\beta_d := \measuredangle abd, \gamma < 180^o (mod\ 360^o)$ *gilt:*

$$\exists c:\ \measuredangle abc = \beta \ und\ \measuredangle bcd = \gamma \iff \beta > \measuredangle abd > \beta + \gamma - 180^o (mod\ 360^o),$$

2. Für $\forall a,b,d,\gamma > 180^o (mod\ 360^o)$ *gilt:*

$$\exists c:\ \measuredangle abc = \beta \ und\ \measuredangle bcd = \gamma \iff \beta < \measuredangle abd < \beta + \gamma - 180^o (mod\ 360^o),$$

wobei

$$\beta > \alpha (mod\ 360^o) :\Leftrightarrow \beta \in\ ]\alpha, alpha + 180^o[\ \ (mod\ 360^o).$$

Beweis:
zu 1.:<u>Existenz von $c \Rightarrow$ Winkelungleichung:</u>

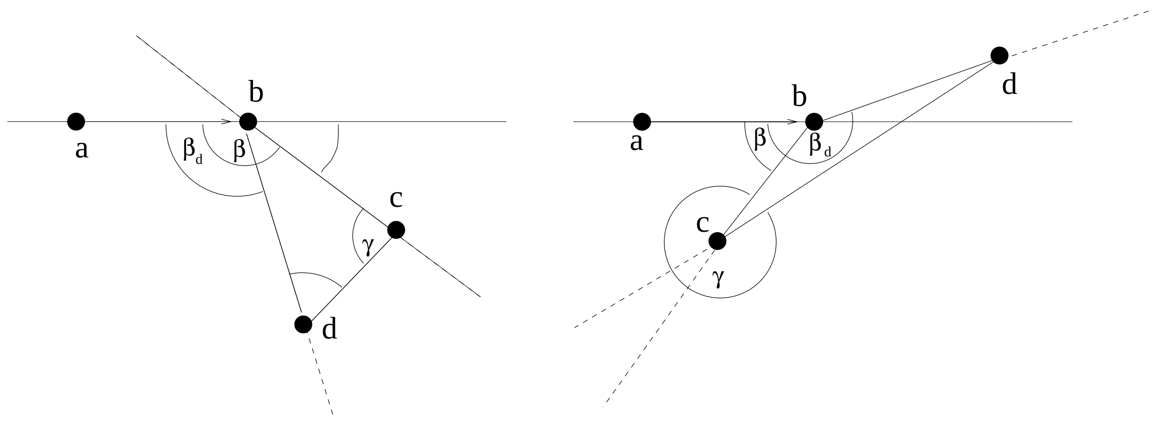


Abbildung 2.6: Wimpellemma

Sei c so ein Punkt mit $0^o < \gamma < 180^o$ (vgl. Abbildung 2.6a.), dann ist auch $\measuredangle cdb > 0^o, \measuredangle dbc = \beta - \beta_d > 0^o (mod\ 360^o)$, sodaß die erste Ungleichung gilt. Nach dem Winkelsummensatz gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} \measuredangle dbc & + & \measuredangle bcd & + & \measuredangle cdb & = & 180^o \\ \beta - \beta_d & + & \gamma & + & (-180^o) & = & -\measuredangle cdb \\ \beta & + & \gamma & + & (-180^o) & = & \beta_d - \measuredangle cdb \ < \ \measuredangle abd \end{array}$$

Daraus folgt nach kurzer Umformung die zweite Ungleichung.
<u>Winkelungleichung ⇒ Existenz von c:</u>

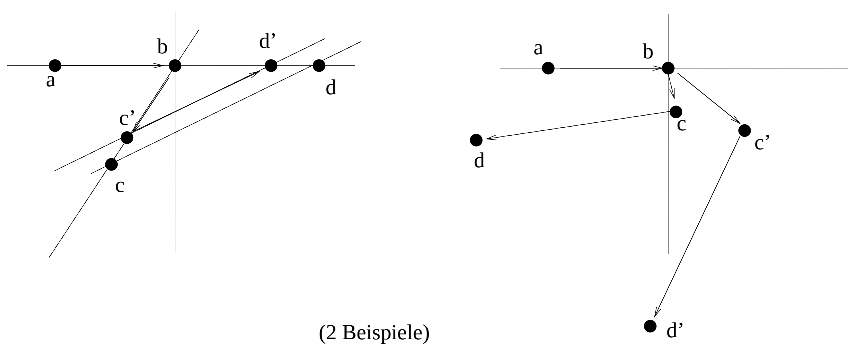


Abbildung 2.7: Anwendung des Wimpellemmas für den Beweis der Kompostionsvollständigkeit

Behauptung: c ist Schnittpunkt der Halbgeraden, die von Winkel $\measuredangle abc := \beta$ und $\measuredangle bdc := \beta + \gamma - 180^o - \measuredangle abd$ bestimmt werden. Dieser Schnittpunkt existiert, da $\measuredangle dbc - \measuredangle bdc = 180^o - \gamma < 180^o (mod\, 360^o)$. (Vgl. Abbildung 2.7)
2. folgt aus 1. durch Spiegelung der Figur, denn dabei ändert sich die Orientierung der Winkel, folglich drehen sich die Vorzeichen um.

□(Wimpellemma 28)

Nun bezeichne $\lfloor\alpha\rfloor := \lfloor\frac{\alpha}{90^o}\rfloor \cdot 90^o$ den auf volle 90^o abgerundeten Winkel, entsprechend $\lceil\alpha\rceil := \lceil\frac{\alpha}{90^o}\rceil \cdot 90^o$ den auf volle 90^o aufgerundeten Winkel, $0 < \Delta\alpha := \alpha - \lfloor\alpha\rfloor < 90^o$, und sei $\alpha_1 \sim \alpha_2 :\Leftrightarrow \lfloor\alpha_1\rfloor = \lfloor\alpha_2\rfloor \wedge \lceil\alpha_1\rceil = \lceil\alpha_2\rceil$. Dann gilt

$$Rel_{\mathfrak{SC}}\ (a,b:c) = \ Rel_{\mathfrak{SC}}\ (a',b':c') \iff \measuredangle abc \sim \measuredangle a'b'c'$$

Behauptung:
Zu beliebigen $\beta' \neq \lfloor\beta\rfloor, \gamma' \neq \lfloor\gamma\rfloor$ und $\varphi \sim (\beta'+\gamma')$ existieren $\beta \sim \beta'$, und $\gamma \sim \gamma'$, sodaß $\varphi = \beta + \gamma$.
Denn $\Delta := \varphi - \lfloor\beta'\rfloor - \lfloor\gamma'\rfloor \in [0^o, 180^o[$ und $\Delta \neq 0$. Daher addieren sich $\beta := (\lfloor\beta'\rfloor + \frac{\Delta}{2}) \sim \beta'$ und $\gamma := (\lfloor\gamma'\rfloor + \frac{\Delta}{2}) \sim \gamma'$ zu φ.

Diese Behauptung nutze ich nun zum Beweis von Satz 27, 4.Fall.
Sei nun $\measuredangle abd = \beta_d$. Falls $\varphi' := \beta' + \gamma' - 180^o < \beta_d \ (mod 360\ ^o)$, so existiert nach dem Winkellemma der eine Erweiterung c, und der Satz 27 ist bewiesen. Andernfalls, also $\varphi' > \beta_d$ und damit $\varphi \leq \beta_d - 180^o$ und $\beta_d \sim \beta_d{}' := \measuredangle abd'$ und nach Winkellemma $\varphi' < \beta'{}_d\ (mod\ 360^o)$ gilt, also

$$\beta'{}_d - 180^o < \varphi' - 180^o < \beta_d - 180^o \ \text{ oder } \ \beta_d < \varphi' < \beta'{}_d \ (\quad \mod 360^o)$$

Daher $\varphi' \sim \beta_d$.
Da $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S})$ eine ungerade Zahl ist, bilden die Winkel der Realisierungen das offene Intervall $\beta_d \in \ ]\lfloor\beta_d\rfloor, \lceil\beta_d\rceil[\ \Rightarrow \exists\varphi : \varphi \sim \beta_d, \varphi < \beta_d \ (\mod 360^o)$. Wie die Behauptung zeigt, existieren $\beta \sim \beta'$, und $\gamma \sim \gamma'$, sodaß $\beta + \gamma - 180^o = \varphi < \beta_d$. Also existiert nach Wimpellemma ein realisierender Punkt c.

$\square$(Satz 27)

Damit ist bewiesen, daß Folgerungen, die man in SC aus Transformationsoperationen ziehen kann, zwar korrekt sind, aber möglicherweise zu allgemein. Inkonsistenzen werden möglicherweise nicht entdeckt. Da in $\mathfrak{SC}$ nur eine Komposition vorkommt, müssen in vielen Fällen vor der Anwendung der Komposition die Relationen transformiert werden. Wenn dies nicht nötig ist, sind Folgerungen mit Hilfe der Komposition in $\mathfrak{SC}$ informationserhaltend sind, weil die Semantik der Komposition informationserhaltend ist. Damit läßt sich nun die oben gestellte Frage mit Hilfe des Kalküls bestimmen. Wo kann m nun in Bezug auf die Richtung ab liegen?
Zuerst läßt sich die Relation von (b,u,m) aus

$$\{\ \mathsf{5}\ \}(b,u:d), \quad und \quad \{\ \mathsf{6}\ \}(u,d:m)$$

bestimmen. Es gilt

$$\{5\}\circ\{6\} = \{5\}\dotplus\{6\}^{12}+\{4\} \quad \mathrm{mod}\ 8 = \{5\}\dotplus\{3\}+\{4\} \quad \mathrm{mod}\ 8 \ = \{\ \{3{,}4{,}5\}\}.$$

Nun läßt sich die Relation von (a, b, m) aus

$$\{\ 2\ \}(a, b : u), \quad \textit{und} \quad \{\ 3{,}4{,}5\ \}(b, u : m)$$

bestimmen.

$$\begin{array}{lclclcl}
\{2\}\circ\{3\} & = & \{2\}\dotplus\{5{,}6{,}7\}+ & \{4\} & \mathrm{mod}\ 8 & = & \{3{,}4{,}5\}, \\
\{2\}\circ\{4\} & = & \{2\}\dotplus\{0, 4,\ \text{undef.}\}+ & \{4\} & \mathrm{mod}\ 8 & = & \{\ 2{,}6,\ \text{undef.}\ \},: \\
\{2\}\circ\{5\} & = & \{2\}\dotplus\{1, 2, 3\}+ & \{4\} & \mathrm{mod}\ 8 & = & \{\ 7{,}0{,}1\}.
\end{array}$$

2.4 Verfeinerung als Weg zu besseren Kalkülen

Wie man sieht, ist der Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{EC}$ ein recht grober Kalkül in sofern, als schon nach wenigen Kompositionen hintereinander der Raum der möglichen Orte für ein Objekt fast nicht mehr eingeschränkt sein muß. Zum einen liegt dies daran, daß die Hälfte der Relationen schon ein Viertel des Raumes umfassen, also eine sehr große Region. Zum anderen breitet sich Ungewißheit schnell aus, da die Invertierung in die Komposition einfließt und die Permutationen der Relationen $\{3\}$, $\{4\}$ und $\{5\}$ mehrere Relationen umfassen.

Um feinere Aussagen machen und ableiten zu können, entwickelte FREKSA eine Verfeinerung, den ***Doppelkreuzkalkül*** $\mathfrak{DC}$.
Als eine ***Verfeinerung*** gilt dabei jeder Kalkül, mit dessen Vervollständigung man den gröberen beschreiben kann.

Definition 29 ((Echt) feinere und gröbere Kalküle) *:*
(endlich) ***feiner-gleich*** *als ein anderer Kalkül* $\mathfrak{L}$ *(*$\mathfrak{K} \Rrightarrow \mathfrak{L}$ *bzw.* $\mathfrak{K} \overset{e}{\Rrightarrow} \mathfrak{L}$*), falls jede Relation in* $\mathfrak{L}$ *eine (endliche) Vereinigung von Relationen aus* $\mathfrak{K}$ *ist.* $\mathfrak{L}$ *heißt dann* **(endlich) gröber-gleich** *als kal K.(*$\mathfrak{K} \Lleftarrow \mathfrak{L}$ *bzw.* $\mathfrak{K} \overset{e}{\Lleftarrow} \mathfrak{L}$*).* $\mathfrak{K}$ *heißt* ***echt feiner*** *als* $\mathfrak{L}$*.(*$\mathfrak{K} \overset{\neq}{\Rrightarrow} \mathfrak{L}$*), wenn* $\mathfrak{K}$ *feiner-gleich als* $\mathfrak{L}$ *ist, aber* $\mathfrak{L}$ *nicht feiner-gleich als* $\mathfrak{K}$ *ist.*

Direkt aus der Definition ergibt sich:

Bemerkung 30 (Echt feiner ist Halbordnungsrelation) *:*
(Endlich) feiner-gleich ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch. (Endlich) echt feiner ist irreflexiv, transitiv und antisymmetrisch, bildet also eine Halbordnung auf den Kalkülen.

Anschaulich bedeutet $\mathsf{K} \Supset \mathsf{L}$, daß jede Relation von $\mathfrak{L}$ eine Relation der Vervollständigung des feineren Kalküls $\mathfrak{K}$ ist.
Wenn ich nichts anderes erwähne, sind alle angegebenen Kalküle vollständig. Unter vollständigen Kalkülen sind gröbere Kalküle dasselbe wie Teilkalküle:

Bemerkung 31 (Kalkül und sein Teilkalkül) *:*
1. Falls $\mathsf{K} \supset \mathfrak{L}$*, so gilt* $\mathfrak{K} \overset{e}{\Supset} \mathfrak{L}$*.* *2.* $\mathfrak{K} \Supset \mathfrak{L} \Rightarrow (\mathfrak{K})^{\cup} \supseteq (\mathfrak{L})^{\cup}$

Beweis:
1. Jede Relation von $\mathfrak{L}$ ist auch Relation von $\mathfrak{K}$, somit Vereinigung von sich selbst. 2. Sei $\mathfrak{K} \Supset \mathfrak{L}$, $\mathsf{L} = \bigcup_{i \in I} \mathsf{L}_i \in (\mathfrak{L})^{\cup}$. Dann

$$\mathsf{L} = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} K_i) \in (\mathfrak{K})^{\cup} \; (K_i \in \mathfrak{K}).$$

Wegen $L \subset (\mathfrak{L})^{\cup} \subset (\mathfrak{K})^{\cup}$ ist die Rück-Richtung klar.

□(Bemerkung 31)

Bemerkung 32 (Kalkül und sein Basiskalkül) *:*
1. Für jeden Kalkül gilt:
$\mathfrak{K}$ *und* $\mathcal{B}(\mathfrak{K})$ *sind paarweise feiner-gleich, aber nicht echt feiner.*
2. Wenn $\mathfrak{K}$ *erschöpfend ist, dann sind* $\mathfrak{K}$*,* $\mathcal{B}(\mathfrak{K})$ *und* $\mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{K})$ *paarweise feiner-gleich, aber nicht echt feiner.*
3. Wenn B *endlich ist, sind sie sogar paarweise endlich feiner-gleich.*

Beweis:
1. Da $\mathfrak{K} \supset \mathcal{B}(\mathfrak{K})$, genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{B}(\mathfrak{K}) \Supset \mathfrak{K}$. Dies gilt, da jede Relation von $\mathfrak{K}$ Disjunktion von Basisrelationen $\in B$.
2. Nach Lemma 17 gilt $\bigcup B(\mathfrak{K}) = U^k$, wenn $\mathfrak{K}$ erschöpfend k-stellig ist. Also gilt $\mathcal{B}(\mathfrak{K}) \Supset \mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{K})$. Nach 1. gilt nun also $\mathcal{B}(\mathfrak{K}) \Supset \mathfrak{B}^{\top}(\mathfrak{K}) \supset .\mathfrak{B}(\mathfrak{K}) \Supset \mathfrak{K}$. 3. Wenn es nur endlich viele Basisrelationen in $\mathfrak{K}$ gibt, sind diese Disjunktionen alle endlich.

□(Bemerkung 32)

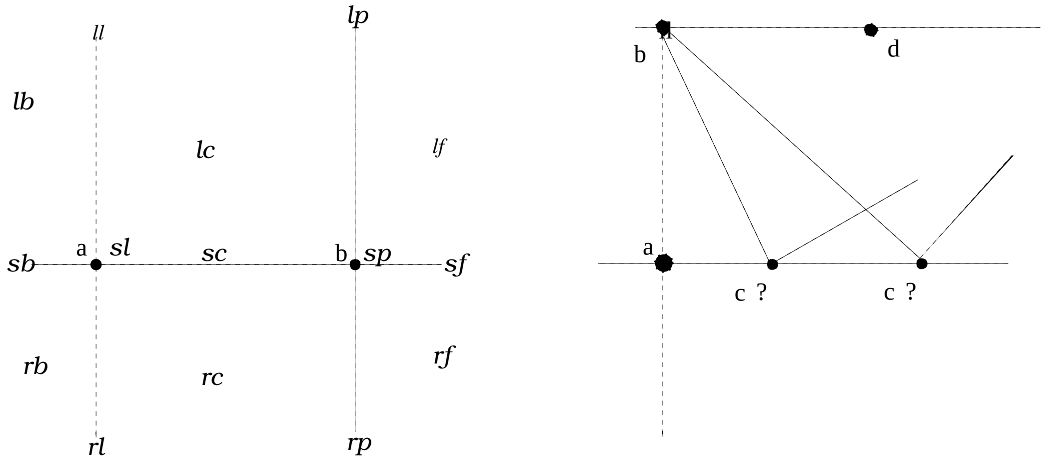
In jedem Kalkül kann man mit den Variablen und Relationssymbolen eine Konstellation C ***konstruieren*** .

Typische Verfeinerungen entstehen durch Partitionierung einer oder mehrerer Basisrelationen. So gelangte auch Freksa zu einem neuen Kalkül. Wenn sich ein Mensch von einem Punkt a zu einem Punkt b fortbewegt, kann er an beiden Punkten vorne von hinten unterscheiden. Dies legt die Verfeinerung nahe, die Vorn-Hinten-Dichotomie des Einzelkreuzkalküls nicht nur am Referenzpunkt b, sondern zusätzlich am Startpunkt a anzuwenden. Dies entspricht einer Partitionierung der drei Relationen 3, 4 und 5 in jeweils drei Unterrelationen, die durch die Linie durch a senkrecht zu ab definiert werden. Für die Lokalisierung des Zielpunktes c ergibt sich also eine Unterscheidung in 5 hinten-vorne-Bereiche : Weiter als b ($x\mathfrak{f}$(further / front area), Senkrecht projizierbar auf den Referenzpunkt b (xp(perpendicular), Näher als b (xc(closer / center), Längs einer senkrechten Linie durch den Startpunkt a (xl(location / lateral line) und Hinter a (xb (behind / back area). Der Buchstabe x wird durch einen der Buchstaben l(left), R(right) oder n (straight) ersetzt, je nach dem, ob c links von, rechts von oder direkt auf der Referenzlinie durch a und b liegt. Insgesamt lassen sich so 15 Relationen unterscheiden. (vgl. Tabelle 2.3) Jede Relation entspricht dabei genau einem Paar aus SC -Relation und ihrer Inversen (in Klammern angegeben). Sie definieren die Semantik von $\mathfrak{DC}$.
Als zusätzliche Vrfeinerung kann $\mathfrak{DC}$ auch ausdrücken, daß Punkte gleich sind, etwas, was in $\mathfrak{SC}$ nicht möglich ist. Für die in $\mathfrak{SC}$ nicht definierten zugehörigen Relationen schreibe ich a (für $c = a$) und b (für $c = b$).

{lf} (7/3) =left-front	{sf} (0/4) = straight-front	{rf} (1/5) = right-front
{lp} (6/3) = left- perpendicular	{e_{23}} (b/4) = position 2 equals position 3	{rp} (2/5) =right-perpendicular
{lc} (5/3) = left-centre	{sc} (4/4) = straight-centre	{rc} (3/5) = right-centre
{ll} (5/2) = left Linie	{e_{13}} (4/a) = position 1 equals position 3	{rl} (3/6) = right Linie
{lb} (5/1) = left-back	{sb} (4/0) = straight-back	{rb} (3/7) = right-back

Tabelle 2.3: Die Definition der Relationen im Doppelkreuzkalkül, unter Zuhilfenahme der $\mathfrak{SC}$-Relationen. Dabei bedeutet r (r_1/r_2), daß $\{\ r\ \}(a, b : c) \Leftrightarrow \{\ r_1\ \}(a, b : c) \wedge \{\ r_2\ \}(b, a : c)$ (also $\{\ r_1^{(12)}\ \}(a, b : c)$).

In FREKSAs Kalkül wird der Fall, daß keine Bewegung stattfindet, d. h. daß der Startpunkt a und der Referenzpunkt b koinzidieren, nicht betrachtet. Deshalb definiert die betreffende Semantik die Relation eines instanzierten Tripels $\mathit{Rel}\ (a^\theta, b^\theta : c^\theta)$ als $\top$ (universelle Relation, vollständige Unkenntnis), sobald $a^\theta = b^\theta$. Wenn $a^\theta \neq b^\theta$, sind die definierenden Regionen in dieser Semantik genau die Regionen auf und zwischen den Linien, die die zwei Punkte $\ell(a, b)$ verbindet, und die Linien senkrecht dazu durch einen der zwei Punkte (vgl. Abbildung 2.8a.):



a. Die repräsentierbaren Basisrelationen des Doppelkreuz-Kalküls

b. Das Beispiel für die Kompositionsunvollständigkeit des Doppelkreuz-Kalküls

Abbildung 2.8: Die Relationen von FREKSAs Kalkül DC

FREKSA gibt dann eine Kompositionstabelle für die Komposition $\mathsf{R}\ (a, b : c) \circ \mathsf{S}\ (b, c : d) = \mathsf{R}{\circ}\mathsf{S}\ (a, b : d)$ an.

Satz 33 (Kompositionsunvollständigkeit von $\mathfrak{DC}$) *:*
Diese $\mathfrak{DC}$-Komposition $\{\mathit{rl}\} \circ \{\mathit{lp}\} \supset \{\mathit{rp}\}$ ist nicht vollständig.

Beweis:
Betrachte etwa die Realisierung $(a = (0; 0), b = (0; 1), d = (1; 1))$ mit $\{\ \mathit{rp}\ \}(a, b : d)$ (vgl. Abbildung 2.8b.). Jede konsistente Erweiterung c mit $\{\ \mathit{rl}\ \}(a, b : c)$ hat die Koordinaten $(x; 0)$, wobei $x > 0$. Nun gilt

$$\{\ \mathit{rl}\ \}(b, c : d) \iff x(1-x) + 1 \cdot 1 = 0$$

(Skalarprodukt). Diese quadratische Gleichung hat jedoch keine Lösung. 33

$\Box$(Satz 33)

Kurz gesagt, auch $\mathfrak{DC}$ genügt nicht den Vollständigkeitsvorstellungen, die man vernünftigerweise an ein Kalkül stellt.
Zusätzlich liegt es nahe zu fordern, daß die Übersetzung einer räumlichen Anordnung in die Sprache des Kalküls immer auf einfache Weise möglich ist: Dazu fordert man:
3. daß es für jedes Tripel eine Relation im Kalkül gibt, mit der man die Beziehung zwischen den drei Punkten ausdrücken kann, d. h. , daß es die Tripel aus $\mathbb{R}^3$ erschöpfend beschreiben kann.
4. daß die Beschreibung durch Basisrelationen eindeutig ist. Das ist dann der Fall, wenn die Basisrelationen paarweise **disjunkt** im mengentheoretischen Sinn sind.

So wie $\mathfrak{SC}$, hat $\mathfrak{DC}$ keine JEPD-Basis, denn $rel(a, a, a)$ ist nicht definiert. Er ist durch die angegebenen Basisrelationen disjunkt erzeugbar.
So, wie der Doppelkreuzkalkül definiert wurde, ist die Permutation INV vollständig, da ja jede Relation als Paar von Relation und einer ihrer möglichen Inversen im Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{SC}$ definiert wurde. Es stellt sich nun die Frage,ob auch die anderen Permutationen vollständig sind, so daß $\mathfrak{DC}$ immerhin permutationsvollständig wäre.

Zur Klärung dieser Frage betrachte man die Permutationen von Freksas Doppelkreuzkalkül:

Wie die Tabelle **??** zeigt, ist auch dieses System leider unvollständig, denn:
1. Freksa selbst [ZF93] bezeichnet das Ergebnis von ROT($\{\mathit{e}_{23}\}$) und CONV($\{\mathit{e}_{13}\}$) als ein Problem. Denn die Tripel, bei denen Startpunkt und Referenzpunkt zusammenfallen, kann er in seinem Kalkül nur mit der Relation $\top$ (absolute Unwissenheit) klassifizieren.
Um zwischen solch verlorengegangener impliziter Information und dem Fall, in dem es wirklich totale Unkenntnis gibt, spezifizieren zu können, führe ich neue Basisrelationen ein für den Fall, daß Start- und Referenzpunkt zusammenfallen, nämlich eq = (alle) gleich (equal) (genau dann, wenn $a = b = c$) und e_{12} (genau dann, wenn $a = b \neq c$). Alle meine Kalküle sollen zukünftig diese Relationen enthalten, deren Semantik vom Gleichheitskalkül her bekannt sind (vgl. Abschnitt 57).
2. Doch selbst nach dieser Ergänzung sind die Transformationsoperationen REV, CONV, ROT und TOR nicht vollständig.
Beispiel: Obwohl CONV($\{\mathit{lf}\}$)= $\{\mathit{rc}\}$ ist, gibt es eine Instantiation der Relation $\{\mathit{rc}\}$, etwa

$$a = (0;0), \quad b = (0;2), \quad c = (2;1)$$

so, daß die Tripel CONV $^{-1}((a, b, c)) = a, c, b$ nicht $\{\mathit{lf}\}(a, c : b)$ erfüllen.

:

Permutation: ID (Identität) Bez. bei [ZF93]: (ID)	INV (Inverse) (INV)	REV (Reverse) (HMI)	CONV (Konverse) (SC)	ROT Rotierte (HM)	TOR Torsion (SCI)
$(x, y : z)$	$(y, x : z)$	$(z, y : x)$	$(x, z : y)$	$(y, z : x)$	$(z, x : y)$
{lf}	{rb}	{rf}	{rc}	{lb}	{lc}
{sf}	{sb}	{sf}	{sc}	{sb}	{sc}
{rf}	{lb}	{lf}	{lc}	{rb}	{rc}
{lp}	{rl}	{rp}	{rc}	{ll}	{lc}
$\{e_{23}\}$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{12}\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{12}\}$	$\{e_{13}\}$
{rp}	{ll}	{lp}	{lc}	{rl}	{rc}
{lc}	{rc}	{ rc, rl, rb }	{ rf, rp, rc }	{ lf, lp, lc }	{ lc, ll, lb }
{sc}	{sc}	{sb}	{sf}	{sf} (0/4)	{sb}
{rc}	{lc}	{lc, ll, lb}	{lf, lp, lc}	{rf, rp, rc}	{rc, rl, rb}
{ll}	{rp}	{rc}	{rl}	{lc}	{lp}
$\{e_{13}\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{12}\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{12}\}$
{rl}	{lp}	{lc}	{ll}	{rc}	{rp}
{lb}	{rp}	{rc}	{rb}	{lc}	{lp}
{sb}	{sf}	{sc}	{sb}	{sc}	{sf}
{rb}	{lf}	{lc}	{lb}	{rc}	{rf}

Tabelle 2.4: Tabelle zur Veranschaulichung der Permutationen von DC

Den Nachteil dieser Unvollständigkeit erkennt man am besten anhand eines Beispiels. Betrachtet man das CSP

$$\{\ rc\ \}(a, b : c) \quad (1), \qquad \{\ rf\ \}(b, c : a) \quad (2), \{\ lc\ \}(a, c : b) \quad (3).$$

Eine Umwandlung aller Constaints auf

$$\{\ rc\ \}(a, b : c)(1), \qquad \{\ rc,\ rl,\ rb\ \}(a, b : c) \quad (2), \qquad \{\ rf,\ rp,\ rc\ \}(a, b : c) \quad (3)$$

führt zu der Annahme, daß das System konsistent ist, denn $\{\ rc\ \}(a, b : c)$ widerspricht keinem Constraint.
Allerdings folgt aus (2), daß $\measuredangle bca > 90^o$, aber aus (3) folgt $\measuredangle bca < 90^o$. Diese Inkonsistenz findet man bei Durchführung aller Transformationsoperatationen von jedem Tripel auf jedes andere: Denn dann ergibt sich beispielsweise

$$\{\ rf,\ rp,\ rc\ \}(b, c : a) \quad (1), \qquad \{\ rf\ \}(b, c : a) \quad (2), \qquad \{\ rc,\ rl,\ rb\ \}(b, c : a) \quad (3).$$

Offensichtlich benötigen einige der Relationen, nämlich $\{e_{23}\}$ und $\{e_{13}\}$, die neue Relation $\{e_{12}\}$ = extra Punkt als ihre Permutationsrelation. Während $\{eq\}$ in allen Transformationen erhalten bleibt, sind für $\{e_{12}\}$ die Transformationen definiert wie folgt:

Transformation:	INV	REV	CONV	ROT	TOR
ID: $(x, y : z)$	$(y, x : z)$	$(z, y : x)$	$(x, z : y)$	$(y, z : x)$	$(z, x : y)$
$\{ e_{12} \}$	$\{ e_{12} \}$	$\{ e_{23} \}$	$\{ e_{13} \}$	$\{ e_{13} \}$	$\{ e_{23} \}$

Tabelle 2.5: Die Transformationen von e_{12}.

Zusammenfassung:
FREKSAs Doppelkreuzkalkül $\mathfrak{DC}$ ist nicht permutationsvollständig, und nicht kompositionsvollständig. Der Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{SC}$ ist zwar kompositionsvollständig, aber nicht permutationsvollständig. Gibt es ein besseres Kalkül?

2.5 Kriterien

Um das entscheiden zu können, will ich zunächst einige weitere Kriterien zur Bewertung von Kalkülen zusammentragen. Ich will dabei untersuchen, welche sich von gröberen auf feinere Kalküle übertragen oder umgekehrt.

Definition 34 (Definierbare Relationen) *:*
*Eine k-stellige Relation $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt **definierbar** durch ein Kalkül $\mathfrak{K}$, genau dann wenn es ein $\mathfrak{K}$-CSP $\mathcal{C}$ gibt, das mindestens die Elemente $e_1, \dots, e_k$ so enthält, daß für jede Instantiation von $e_1, \dots, e_k$ gilt, daß es eine erfüllbare Erweiterung auf alle Variablen des CSP gibt, genau dann wenn $\mathsf{R}(e_1, \dots, e_k)$ gilt. Eine Teilmenge $R' \subset R(\mathfrak{K})$ definiert R, falls alle Relationen in $\mathcal{C}$ aus R' sind. Man sagt dann, $\mathcal{C}$ definiere R in $\mathfrak{K}$ bzw. über R'.*

Beispiel 6 (Die Parallel(a,b,c,d)-Relation ist $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{DC})$-definierbar) *:*
Die 4-stellige Relation $\mathsf{Parallel}(a, b, c, d) :\Longleftrightarrow \ell(a, b) \,||\, \ell(c, d)$ (inklusive $\ell(a, b) = \ell(c, d)$) ist definierbar durch das CSP (vgl. AbbildungFigurPar)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}ar(a, b, c, d) := (\ (a, b, c, d; x_1, x_2),\quad & \{\{\ \mathsf{sf}\ \}(a, b : x_1), \\ & \{\ \mathsf{lp}\ \}(a, x_1 : x_2), \{\ \mathsf{lp}\ \}(x_1, x_2 : x_3), \\ & \{\ \mathsf{lp}\ \}(x_2, x_3 : x_4), \\ & \{\ \mathsf{lp}\ \}(x_3, x_4 : c), \{\ \mathsf{lp}\ \}(x_3, x_4 : d)\ \} \quad). \end{aligned}$$

Beweis:
In jeder Realisierung des CSP $\mathcal{P}ar$ gilt (vgl. Abbildung 2.9) $\mathsf{Parallel}(a, b, c, d)$, denn die Constraints erzwingen vier rechte Winkel.

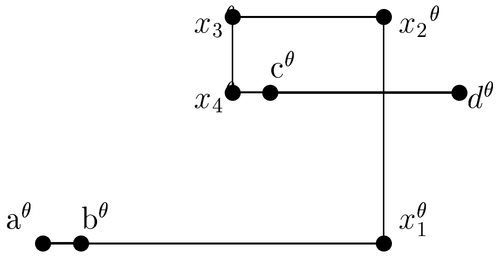


Abbildung 2.9: Ein Modell von CSP Par

Für die Rückrichtung muß zu einer gegebenen Instanz θ, die $\mathit{Parallel}$ realisiert, eine konsistente Erweiterung auf $\mathcal{Par}$ gefunden werden. Dazu instanziere x_1 mit einem Punkt auf der Geraden $\ell(a^\theta, b^\theta)$, der von b^θ weiter entfernt ist als von c^θ, instanziere x_2 auf der Senkrechten $\ell(a^\theta, b^\theta)$ in x_1, so daß $|dist(x_1^\theta, x_2^\theta)| > \max(\{|dist(x_1^\theta, c^\theta)|, |dist(x_1^\theta, d^\theta)|\})$ und c^θ links von $a^\theta b^\theta$. Wähle für x_4^θ einen Punkt auf der Gerade $\ell(c^\theta, d^\theta)$, der von x_2^θ weiter entfernt als c^θ und d^θ ist. Schließlich instanziere x_3 als Schnittpunkt der Senkrechten zu $\ell(c^\theta, d^\theta)$ durch x_4^θ mit der Senkrechten zu $\ell(x_1^\theta, x_2^\theta)$ durch x_2^θ. Man überprüft leicht, daß diese Instantiation alle Relationen von $\mathcal{Par}$ erfüllt, wenn $\ell(a^\theta, b^\theta)||\ell(c^\theta, d^\theta)$.

$\Box$(Beispiel 6)

Definition 35 (ausdrucksstärker) *:*
Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt **so ausdrucksstark wie** *ein anderer Kalkül $\mathfrak{L}$, wenn jede Relation, die durch $\mathfrak{L}$ definierbar ist, auch durch $\mathfrak{K}$ definierbar ist. $\mathfrak{K}$ heißt* **(echt) ausdrucksstärker** *als $\mathfrak{L}$, wenn $\mathfrak{K}$ so ausdrucksstark wie $\mathfrak{L}$ ist, aber $\mathfrak{L}$ nicht so ausdrucksstark wie $\mathfrak{K}$ ist.*

Offenbar ist jeder Kalkül mindestens so ausdrucksstark wie seine Teilkalküle, und jeder vollständige Kalkül ist mindestens so aussdrucksstark wie alle gröberen. Die Umkehrung muß nicht stimmen und die Voraussetzung „vollständig“ ist wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt[6]:

Beispiel 7 (Kalkül und sein Basiskalkül) *:*
Wenn $\mathcal{B}(\mathfrak{K}) \subsetneqq \mathfrak{K}$, dann ist $\mathfrak{K}$ echt ausdrucksstärker als $\mathcal{B}(\mathfrak{K})$.

[6]Beachte, daß $\mathcal{B}(\mathfrak{K}) \Subset \mathfrak{K}$. Es existieren auch weniger triviale Beispiele. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.5: Die Relation $\{\mathtt{tr}\}$ des Kalküls $\mathfrak{L}$ ist nicht in $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{C}v)$ definierbar, da in $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{C}v)$ nur Relationen mit konvexen Regionen (vgl. Definition 69 in Abschnitt 4.1) definierbar sind.

Beweis:
Sei $\mathsf{R} \neq \emptyset$ eine Relation in $\mathfrak{K} \setminus \mathcal{B}(\mathfrak{K})$.[7] Die Relation $\mathsf{R}\ (a, b : c)$ kann im vollen Kalkül $\mathcal{B}\mathfrak{K}$ nicht definiert werden, d. h. es gibt keine Instanz I, so daß für alle Instantiationen θ gilt:

$$\mathsf{R}\ (a^\theta, b^\theta : c^\theta) \iff \exists \theta' \supset \theta \restriction \{a, b, c\} :\ \theta' \models C$$

(d. h. es existiert eine realisiserbare Erweiterung von θauf C). Denn es gibt in jeder $\mathcal{B}(\mathfrak{K})$-Instanz C eines Modells von $\mathsf{R}\ (a, b : c)$ eine Basisrelation $\mathsf{B}\ (a, b : c)$ mit $B \in B, B \subsetneq R$. Nach Wahl von R gibt es Realisationen $(a^\theta, b^\theta, c^\theta)$ von R, in denen $\mathsf{B}\ (a^\theta, b^\theta : c^\theta)$ nicht gilt, und daher gibt es auch keine realisierbare Erweiterung auf ganz C.

$\square$(Beispiel 7)

Um für die in meiner Arbeit eingeführten Kalküle untersuchen zu können, welcher Kalkül ausdrucksstärker ist, trage ich im folgenden einige einfache Hilfsmittel zusammen, um die Ausdrucksmächtigkeit nachzuweisen.

Definition 36 (Erhalt von Relationen) *:*
Wir sagen, eine Relation R **bleibt erhalten** *unter einer Abbildung* α *(in einem Modell* $\mathfrak{M} = (U, \mathcal{I})$*), falls für jedes Tripel* (a, b, c) *mit* $\mathsf{R}\ (a, b : c)$ *auch* $\mathsf{R}\ (\alpha(a), \alpha(b) : \alpha(c))$ *gilt. Die Relation* R *bleibt exakt erhalten unter der Abbildung* α*, falls zusätzlich umgekehrt für jedes Tripel* (a, b, c) *mit* $\mathsf{R}\ (\alpha(a), \alpha(b) : \alpha(c))$ *auch* $\mathsf{R}\ (a, b : c)$ *gilt.*
Eine Menge von Abbildungen A *erhält eine Relation* R *(exakt), genau dann, wenn jede Abbildung* $\alpha \in A$ *die Relation* R *(exakt) erhält.*

Beispiel 8 (Erhalt der Gleichheitsrelation) *:*
In jedem Kalkül bleibt die Relation $\{\mathsf{eq}\}$ *unter jeder Abbildung erhalten. Sie bleibt genau dann exakt erhalten, wenn die Abbildung injektiv ist.*

Beweis:
Es gilt $(p_1, \ldots, p_n) \in \{\mathsf{eq}\} \iff \forall\, i, j :\ p_i = p_j$. Dann gilt auch $\alpha(p_i) = \alpha(p_j)$ für jede Abbildung α, und somit $(\alpha(p_1), \ldots \alpha(p_n)) \in \{\mathsf{eq}\}$. Für injektive Abbildungen gilt offenbar die umgekehrte Richtung auch. Ist aber α nicht injektiv, so existieren zwei Elemente $x_1 \neq x_2$ mit gleichem Bild, also gilt $(\alpha(x_1), \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_2)) \in \{\mathsf{eq}\}$, aber $(x_1, x_2, \ldots, dies_2) \notin \{\mathsf{eq}\}$.

$\square$(Beispiel 8)

[7] Sie existiert, denn sonst wäre $\mathfrak{K} = \mathcal{B}(\mathfrak{K})$, insbesondere falls $\mathfrak{K} = \{\emptyset\}$

Definition 37 (Invarianz) *:*
Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt (exakt) **invariant** *unter einer Abbildung α (in einem Modell $\mathfrak{M} = (U, \mathcal{I})$), genau dann, wenn jede Relation von $\mathfrak{K}$ unter α (exakt) erhalten bleibt. Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt (exakt)* ***invariant*** *unter einer Menge von Abbildungen A, genau dann, wenn jede Abbildung $\alpha \in A$ alle Relationen R von $\mathfrak{K}$ (exakt) erhält.*

Aus dieser Definition ergeben sich sofort einige einfache Folgerungen:

Bemerkung 38 (Erhalt bei Komposition von Abbildungen) *:*
1. Wenn eine Relation unter jeder der Abbildungen α_1 und α_2 (exakt) erhalten bleibt, dann auch unter der Komposition $\alpha_1 \circ \alpha_2$.
Daraus folgt: 2. Wenn ein Kalkül unter Abbildungen α_1 und α_2 (exakt) invariant ist, dann auch unter der Komposition $\alpha_1 \circ \alpha_2$.

Bemerkung 39 (Kriterium für exakte Invarianz) *:*
Erschöpfende Kalküle $\mathfrak{K}$, die unter einer Abbildung α invariant sind, sind exakt invariant, d. h. jede Relation bleibt unter α exakt erhalten.

Beweis:
Bemerkung 38 ist trivial. Für den Beweis von Bemerkung 39 ist zu zeigen, daß für jede Relation R in $\mathfrak{K}$ gilt:

$$(\alpha(p_1), \ldots, \alpha(p_k)) \in \mathsf{R} \Leftrightarrow (p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{R}$$

Angenommen, das gälte für eine Relation R nicht, also $(\alpha(p_1), \ldots, \alpha(p_k)) \in \mathsf{R}$ gilt, aber nicht $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{R}$ Da $\mathfrak{K}$ erschöpfend ist, gilt dann $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{S}$ für eine andere Relation S. Da $\mathfrak{K}$ invariant ist, gilt dann aber auch $(\alpha(p_1), \ldots \alpha(p_k)) \in \mathsf{S}$. Widerspruch!

$\square$(Bemerkungen 38, 39)

Ich komme nun zum zentralen Begriff meiner Arbeit. Ich untersuche Kalküle mit Relationen die invariant sind unter der Gruppe derjenigen Abbildungen, die (orientierte) Winkel und Streckenverhältnisse erhalten, denn diese werden bei der Einteilung in Relationen gemäß dem Prinzip des relative spacial treatment (Vgl. Abschnitt 1.2) berücksichtigt. Diese Abbildungen sind Translationen, Streckungen und Drehungen:

Definition 40 (RST-Kalküle) *:*
Eine Abbildung, die Komposition von Rotationen, Streckungen mit Streckfaktor $\neq 0$ und Translationen ist, heißt ***RST-Abbildung*** *. Eine* ***RST-Relation*** *ist eine unter RST-Abbildungen invariante Relation, das bedeutet, daß wenn*

$\rho : U \mapsto U$ eine Rotation ist, $\sigma : U \mapsto U$ eine Streckung und $\theta : U \mapsto U$ eine Translation, dann gilt für alle $\mathsf{R} \in R$:

$$(p_1, \dots, p_k) \in \mathsf{R} \Rightarrow (\rho \circ \sigma \circ \theta(p_1), \dots \rho \circ \sigma \circ \theta(p_k)) \in \mathsf{R}$$

*Ein **RST-Kalkül** ist ein Kalkül, in dem jede Relation RST-Relation ist.*

Beispiel 9 ($\mathfrak{SC}$ und $\mathfrak{DC}$) *:*
Die soeben vorgestellten Kalküle, der Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{SC}$ und der Doppelkreuzkalkül $\mathfrak{DC}$ sind RST-Kalküle

Diese Invarianzen lassen sich auf verschiedene Weise ausnutzen. Sie sind ein Hilfsmittel bei der überprüfung der Ausdrucksmächtigkeit, wie folgendes Kriterium zeigt; in Kapitel 4 wird sich zeigen, daß man mit RST-Relationen auf praktische Weise rechnen kann.

Bemerkung 41 (Invarianzkriterium) *:*
Wenn R $\mathfrak{K}$-definierbar ist, dann erhält jede $\mathfrak{K}$-invariante Abbildung die Relation R.

Beweis:
Sei das Tripel $(a^{\mathfrak{M}}, b^{\mathfrak{M}} : c^{\mathfrak{M}})$ eine Realisation von R. Zu zeigen ist nun, daß auch $\mathsf{R}\ (\alpha(a^{\mathfrak{M}}), \alpha(b^{\mathfrak{M}}) : \alpha(c^{\mathfrak{M}}))$ gilt, wenn α eine $\mathfrak{K}$-invariante Abbildung ist. Nach Annahme ist R durch eine Instanz R definierbar, wobei $E \supset \{a, b, c\}$ die Menge der Elemente von R ist, und sei $E^{\mathfrak{M}}$ ein Modell von R,. Dann ist auch $E^{\mathfrak{M}'} := \alpha(E^{\mathfrak{M}})$ ebenfalls ein Modell von R, denn wegen der Invarianz realisiert es die gleichen $\mathfrak{K}$-Relationen. Da R die Relation R definiert, ist damit auch das Tripel $(a^{\mathfrak{M}'}, b^{\mathfrak{M}'} : c^{\mathfrak{M}'})$ eine Realisation von R. [8]

□(Bemerkung 41)

Wie man sieht, sind $\mathfrak{K}$-invariante Abbildungen bedeutsam, weil sie Modelle von Konstellationen C wieder auf Modelle von C abbilden. Mit Hilfe dieser Beziehung kann man viele Aussagen über die Ausdrucksmächtigkeit von Kalkülen beweisen, denn wenn umgekehrt eine $\mathfrak{K}$-invariante Abbildung R nicht erhält, dann kann R nicht definierbar sein.

[8] Die Umkehrung des Invarianzkriteriums gilt übrigens nicht. z. B. die Relation $\mathsf{R}\ (a, b : c) := \angle(a, b, c) = \phi$ ist nicht für jeden Winkel ϕ definierbar in $\mathfrak{RC}$, aber jede $\mathfrak{RC}$-invariante Abbildung ist winkelerhaltend und erhält damit R.
Die Eigenschaft, daß jede $\mathfrak{K}$-invariante Abbildung die Relation R erhält, ist also eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, daß R $\mathfrak{K}$-definierbar ist.

Definition 42 ((stetige) Invarianzgruppe) *:*
Die Invarianzgruppe eines Kalkülmodells $\mathfrak{K} = (U, \mathcal{I})$ ist die Menge aller (stetigen) Abbildungen $U \to U$, unter denen $\mathfrak{K}$ exakt invariant ist. Sie bildet mit der Komposition als Verknüpfung und der Identität als Einselement eine algebraische Gruppe.

Beim Übergang zu gröberen Kalkülen verläßt man die Klasse der RST-Kalküle nicht, wie folgender Satz zeigt:

Bemerkung 43 (Vererbung von Invarianz auf gröbere Kalküle) *:*
Wenn ein Kalkül $\mathfrak{K}$ unter einer Abbildung α invariant ist, so ist auch jeder gröbere Kalkül $\mathfrak{L}$ unter α invariant.

Beweis:
Sei R eine beliebige Relation von $\mathfrak{L}$, und $\mathsf{R} = \bigcup_{i \in I} \mathsf{R}_i (\mathsf{R}_i \in \mathfrak{K})$. Zu zeigen ist: $\mathsf{R}(a_1, \ldots, a_n) \Longrightarrow \mathsf{R}(\alpha(a_1), \ldots \alpha(a_n))$. Wenn $\mathfrak{L} \models \mathsf{R}(a_1, \ldots, a_n)$ gilt, dann gilt in $\mathfrak{K}$ für ein $i \in I$ $\mathsf{R}_i(a_1, \ldots, a_n)$, nach Voraussetzung also auch $\mathfrak{K} \models \mathsf{R}_i(a_1, \ldots, a_n)$, und daher gilt $\mathfrak{L} \models \mathsf{R}(\alpha(a_1), \ldots \alpha(a_n))$.

$\square$(Bemerkung 43)

Definition 44 (Beschreibbarkeit) *:*
Ein Kalkülmodell $\mathfrak{K} = (\mathsf{K}, U, \mathcal{I})$ heißt in einer Sprache $\mathcal{L}$ einer Logik L ***beschreibbar*** *, falls es ein Modell $\mathfrak{M}$ der Logik mit gleichem Universum U gibt, so daß für jede Instantiation$C$= $(\{v_1, \ldots, v_n\}; R)$ eine Formel $\phi_I \in \mathcal{L}$ existiert, so daß für alle Instantiationen θ gilt:*

$$\theta \models C \iff \mathfrak{M} \models \phi_C({v^\theta}_1, \ldots, {v^\theta}_n)$$

Insbesondere existiert dann für jede Relation $\mathsf{R} \in R(\mathfrak{K})$ eine Formel $\phi_{\mathsf{R}} \in \mathcal{L}$, so daß für alle Instantiationen θ gilt:

$${v^\theta}_1, \ldots, {v^\theta}_k \in \mathsf{R} \Leftrightarrow \phi_{\mathsf{R}}(v_1, \ldots, v_k).$$

Denn eine k-stellige Relation r kann immer auch als Konstellation $R = (\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}; \mathsf{R})$ angesehen werden. Wie das folgende Kriterium zeigt, genügt es, die Beschreibbarkeit auf Relationen nachzuweisen:

Bemerkung 45 (Relationen-Kriterium für Beschreibbarkeit) *:*
Wenn in einer Logik L die Konjunktion $\wedge$ enthalten ist, insbesondere, wenn L ein Kalkül ist, dann gilt:
$\mathfrak{K} = (\mathsf{K}, U, \mathcal{I})$ ist in L beschreibbar, genau dann wenn es ein Modell $\mathfrak{M}$ der Logik L mit gleichem Universum U gibt, so daß für alle Instantiationen θ gilt:
${v^\theta}_1, \ldots, {v^\theta}_k \in \mathsf{R} \Leftrightarrow \phi_{\mathsf{R}(v_1, \ldots, v_k)}$

Beweis:
Die Hin-Richtung gilt nach dem soeben gesagten. Daß $\mathfrak{K}$ beschreibbar ist, sieht man ebenfalls leicht, denn das gleiche Modell mit

$$\phi_I := \bigwedge_{\mathsf{R}_{(e_{\nu 1},\dots,e_{\nu k})} \in R} \phi_{\mathsf{R}_{(e_{\nu 1},\dots,e_{\nu k})}}((e_{\nu 1},\dots,e_{\nu k}))$$

beschreibt die Konstellation C=({ $e_1,\dots,e_n$ }, R).

□(Bemerkung 45)

Bemerkung 46 (Vererbung der Beschreibbarkeit) *:*
1. Wenn K *in einer Logik* L *beschreibbar ist, die die zweistellige Disjunktion enthält, dann ist auch jeder endlich gröbere Kalkül* K' *in dieser Logik beschreibbar. Wenn* K *selbst endlich ist, d. h. nur aus endlich vielen Relationen besteht, ist also jeder gröbere Kalkül in* L *beschreibbar.*
2. Wenn ein Kalkül K *in einer Logik* L_∞ *beschreibbar ist, die beliebige Disjunktion enthält, dann ist auch jeder gröbere Kalkül* K' *in* L_∞ *beschreibbar.*

Beweis:
Eine Logik, die die zweistellige Disjunktion enthält, kann bekanntlich beliebige endliche Disjunktionen beschreiben, da Disjunktionen assoziativ sind. Es genügt zu zeigen, daß die nach Vergröberung der Relation für jede Konstellation die neue Formel konstruierbar ist durch eine Disjunktion von Formeln, die Konstellationen über dem feinen Kalkül entsprechen.
Seien im folgenden daher für 1. die Indexmengen I_j endlich, für 2. beliebig.
Nach Voraussetzung existiert zu jeder Konstellation $C = (\{e_1,\dots,e_n\};(\mathsf{R}_1;\dots\mathsf{R}_m))$, des feinen Kalküls $\mathfrak{K}$ (wobei $m = n^k$), eine L-Formel $\phi_{\mathsf{R}_1;\dots\mathsf{R}_m}$.
Sei $I\varphi$ eine Konstellation des groben Kalküls $\mathfrak{K}$' und $R = (R_1;\dots R_m)$ die Folge der Relationen in $I\varphi$, wobei t_j das zu R_j gehörige Tupel von Elementen sei. Sei dabei die Relation $R_j \in \underline{R}(\mathfrak{K}')$ durch $R_j = \bigcup_{i\in I_j} \mathsf{R}_i;\ \ \mathsf{R}_i \in \underline{R}(\mathsf{K})$ im feineren Kalkül $\mathfrak{K}$ bestimmt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\theta \models (R_1,\dots R_m) \quad &\iff \textstyle\bigwedge_{j\le m} t_j^\theta \in R_j \\
&\iff \textstyle\bigwedge_{j\le m} (\bigvee_{i\in I_j} t_j^\theta \in \mathsf{R}_i) \\
&\iff \textstyle\bigvee_{i_1\in I_1} (t_1^\theta \in \mathsf{R}_{i_1} \wedge \bigwedge_{2\le j\le m} (\bigvee_{i\in I_j} t_j^\theta \in \mathsf{R}_i)) \\
&\iff \textstyle\bigvee_{i_1\in I_1} \bigvee_{i_2\in I_2} (t_1^\theta \in \mathsf{R}_{i_1} \wedge t_2^\theta \in \mathsf{R}_{i_2} \wedge \bigwedge_{3\le j\le m} (\bigvee_{i\in I_j} t_j^\theta \in \mathsf{R}_i)) \\
&\dots \\
&\iff \textstyle\bigvee_{i_1\in I_1} \dots \bigvee_{i_m\in I_m} (\bigwedge_{j\le m} t_j^\theta \in \mathsf{R}_{i_j}) \\
&\iff \textstyle\bigvee_{i_1\in I_1} \dots \bigvee_{i_m\in I_m} (\theta \models (\mathsf{R}_{i_1},\dots \mathsf{R}_{i_m})) \\
&\iff \textstyle\bigvee_{i_1\in I_1} \dots \bigvee_{i_m\in I_m} (\phi_{(\mathsf{R}_{i_1},\dots \mathsf{R}_{i_m})}(t^\theta{}_1,\dots,t^\theta{}_n)
\end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz gilt nach der Voraussetzung, daß der feine Kalkül beschreibbar ist, und liefert zugleich die Beschreibung von I.

□(Bemerkung 46)

2.6 Ziel

Durch Übergang von einem Kalkül zu einem feineren erhielt Freksa ein Kalkül, in dem die Transformationsoperation INV vollständig ist. Dabei wurden alle Relationen des gröberen Kalküls SC , deren permutierte Relationen zusammengesetzte Relationen bildeten, partitioniert in Äquivalenzklassen. Je zwei Tripel sind in der gleichen Äquivalenzklasse, also in der gleichen Relation der Verfeinerung, wenn ihre Permutation (hier bezüglich π=(12): Transformation INV) die gleiche Relation ergibt. Weil dieses Verfahren abbricht, erhält man damit ein endliches Kalkül, welches bezüglich der benutzten Permutation π vollständig ist.
Ein Kalkül, welches durch dieses Verfahren aus einem anderen entsteht, heiße dessen permutationsvollständiger Abschluß unter der Permutation π. Diese Idee läßt sich sukzessive auf alle Transformationsoperationen anwenden, so daß das Ergebnis permutationsvollständig ist.

Definition 47 (permutationsvollständiger Abschluß $(\mathfrak{K})^p$) *:*
Der permutationsvollständige Abschluß $(\mathfrak{K})^T$ eines Kalküls $\mathfrak{K}$ ist die kleinste permutationsvollständige Verfeinerung von $\mathfrak{K}$.

Es erhebt sich die Frage, ob man die Idee, ternäre Kalküle auf der Basis relativer Richtungen zu definieren, retten kann, indem man den Kalkül weiter verfeinert. Das Ziel ist dabei, eine Verfeinerung zu finden, die möglichst ausdrucksmächtig ist und deren Folgerungen informationserhaltend sind. Daraus ergeben sich zusammenfassend folgende

Anforderungen an ein Relationenkalkül:
1. JEPD
2. Vollständig
3. permutationsvollständig
4. kompositionsvollständig
5. ausdrucksstark
6. handhabbar

Bevor die Suche nach in diesem Sinn optimalen Kalkülen beginnt, stelle ich die bereits erwähnten und einige neue Vorteile zusammen:

Warum sind JEPD-Kalküle besonders praktisch?

- **Eindeutige Beschreibbarkeit von Konstellationen:** Üblicherweise dient ein Kalkül dazu, eine umgangssprachlich beschriebene oder geographisch (geometrisch) vorliegende Konstellation zu beschreiben und Schlußfolgerungen aus ihr zu ziehen. Durch jeden Kalkül mit JEPD-Basis kann jede Konstellation in dem Kalkül ausgedrückt werden, da es erschöpfend ist, und weil die Basis disjunkt ist, ist diese Beschreibung als Basisrelation eindeutig. Man kann dann von dem CSP einer Konstellation sprechen, und von der (Basis-)Relation eines Tripels.
- **Einfache Definierbarkeit:** Kalküle mit (JEPD-)Basis können sehr knapp beschrieben werden, da es möglich ist, die Relationen als Vereinigung ihrer Basisrelationen zu definieren.
- **Eindeutige Basis:** Die Basiselemente sind genau die Atome.

Warum sind vollständige Kalküle besonders praktisch?

- **Ausdrückbarkeit von Unwissenheit:** Unpräzises Wissen kann ausgedrückt werden, insbesondere solches, das durch Kompositionen entsteht.
- **Korrekte Ableitungen:** Jede Operation kann so definiert werden, daß die auf ihr basierenden Ableitungen korrekt sind (vgl. Abschnitt 2.3).
- **Platzsparende Syntaxdefinition:** In vollständigen Relationenalgebren $\mathfrak{K}$ genügt die Angabe der Syntax der Transformationsoperationen und Kompositionen auf den $O(log(\,|K|\,))$ vielen Basisrelationen.
- **Implizites Wissen:** Da vollständige JEPD-Kalküle vollständig unter Zylindrifikation (vgl. nächstes Kapitel) sind, umfassen die ternären Relationen die implizit enthaltenen binären.

Warum sind operationsvollständige Kalküle besonders praktisch?

- **Vollständigkeit von Ableitungsalgorithmen:** Weil vollständige JEPD-Kalküle vollständig unter Schnitt und Komplement sind, lassen sich Schlußfolgerungen ziehen, indem das Kalkül das Komplement einer möglichen Folgerung mit der für dieses Tupel gültigen Relation schneidet und mittels Transformationsoperation und der Operation $\Cap_\kappa\lambda(\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \mathsf{R}_3) = (\mathsf{R}_1 \ {}_\kappa\diamond_\lambda \ \mathsf{R}_2) \cap \mathsf{R}_3$ prüft, ob die so entstandene Konstellation inkonsistent ist. Wenn das Kalkülmodell vollständig für alle in Ableitungen verwendeten Operationen ist, dann sind diese Folgerungen scharf. Andernfalls kann es vorkommen, daß Inkonsistenzen nicht festgestellt werden oder daß der Rechenaufwand sich stark vergrößert.

- **Bessere Einschränkung:** Auch wenn die Komposition nicht für die Konsistenzprüfung verwendet wird, beispielsweise, weil bereits bekannt ist, daß eine Realisierung existiert, kann das Anwenden aller möglichen Kompositionen vor der Suche nach einer konkreten Lösung zu einer erheblichen Einschränkung der möglichen Relationen führen, die umso stärker ist, je weniger Information verloren geht, also insbesondere in permutations- und kompositionsvollständigen Kalkülen.

Ein Kalkül ist umso ausdrucksmächtiger, je mehr Tripel es unterscheiden kann. Es ist klar, daß in ausdrucksmächtigen Kalkülen Konstellationen präziser beschrieben werden können und daher weniger Information bei der Übersetzung einer Konstellation in die Sprache des Kalküls verloren geht. Durch Verfeinerungen von Kalkülen erhöht sich die Ausdrucksmächtigkeit. Je feiner schon die Basisrelationen sind, umso feiner sind auch die darauf basierenden Folgerungen: Transformationen, Kompositionen und Schnitte.

Versucht man diese fünf Kriterien bestmöglich zu erfüllen, kommt man unweigerlich in Konflikt mit der Handhabbarkeit der Kalküle. Je feiner ein Kalkül ist, umso aufwendiger werden die Berechnungen zur Bestimmung der Syntax, basierend auf einer semantischen Interpretation. Die Tabellen werden umso größer, je mehr Relationen er enthält, und umso mehr Operationen müssen ausgeführt werden, je feiner und ausdrucksstärker ein Kalkül ist. All dies führt zu längeren Rechenzeiten sowohl für die automatische Ableitung von Schlußfolgerungen als auch für Konsistenzanalysen.

Welcher Kalkül in diesem Spannungsfeld am geeignetsten ist, hängt ab von der jeweiligen Aufgabenstellung.

Ein ermutigendes theoretisches Ergebnis ist, daß man stets durch Verfeinerung von jedem Kalkül zu einem Ergebnis kommen kann, der mindestens die Kriterien 1. - 3. oder 2. - 4. erfüllt:

Satz 48 (Existenz eines Abschlusses) *:*
Zu jedem Kalkül $\mathfrak{K}$ und jeder Menge von Operatoren M existiert der M-

vollständige Abschluß $(\mathfrak{K})^M$, *in dem alle Operationen aus* M *vollständig sind.*

Beweis:
Sei $\mathfrak{K}^{M(0)} = \mathfrak{K}, \mathfrak{K}^{M(n+1)} = \mathfrak{K}^{M(n)} \cup \{c(\mathsf{R},\mathsf{S}) \mid c \in M, \mathsf{R},\mathsf{S} \in \mathfrak{K}^{M(n)}\}$, dann ist

$$(\mathfrak{K})^M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{K}^{M(n)},$$

denn $(\mathfrak{K})^{M(n)} \in (\mathfrak{K})^M \Rightarrow (\mathfrak{K})^{M(n+1)} \in (\mathfrak{K})^M$, und $(\mathfrak{K})^M$ ist M-vollständig:

$$\mathsf{R},\mathsf{S} \in (\mathfrak{K})^M \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \ \mathsf{R},\mathsf{S} \in (\mathfrak{K})^{(n)} \Rightarrow \mathsf{R} \circ \mathsf{S} \in (\mathfrak{K})^{(n+1)} \subseteq (\mathfrak{K})^M.$$

□(Satz 48)

Bemerkung 49 (Abschlußeigenschaften von $\mathfrak{K}^M$) *:*
1. $\mathfrak{K}^M \supset \mathfrak{K}$
2. $(\mathfrak{K}^M)\ M = \mathfrak{K}^M$
3. $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L} \ \Rightarrow \ \mathfrak{K}^M \subseteq \mathfrak{L}^M$
4. $\mathfrak{K}^M \overset{\not\equiv}{\Supset} \mathfrak{K}$
5. $\mathfrak{K} \Supset \mathfrak{L} \ \Rightarrow \ \mathfrak{K}^M \Supset \mathfrak{L}^M$

Beweis:
2. und 4. folgen direkt aus der Definition.
1. folgt sofort aus $\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathfrak{K}^{(l)} \supset \mathfrak{K}^{(0)}$ Die Abschlußeigenschaften 3. und 5. vererben sich jeweils von $\mathfrak{K}^{(i)}$ $(\mathfrak{K})^{\cup}$

□(Abschlußeigenschaften 49)

Beispiel 10 (permutationsvollständiger Abschluß) $\mathfrak{K}^T = \mathfrak{K}^{T(1)}$ *ist der* ***permutationsvollständige Abschluß*** *von* $\mathfrak{K}$. *Er ist endlich, wenn* $\mathfrak{K}$ *endlich ist, wobei* T *die Menge aller Transformationsoperationen ist.*

Beweis:
Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{K}^{T(2)} \subseteqq \mathfrak{K}^{T(1)}$, denn dann gilt $\mathfrak{K}^{T(n)} = \mathfrak{K}^{T(2)} = \mathfrak{K}^{T(1)}$ nach Definition.
Sei $\mathsf{R}_2 \in \mathfrak{K}^{T(2)}$, also $\mathsf{R}_2 = T^{\pi_2}(\mathsf{R}_1)$, $\mathsf{R}_1 = T^{\pi_1}(\mathsf{R}_0) \in \mathfrak{K}^{T(1)}, \mathsf{R}_0 \in \mathfrak{K}$.
Dann $\mathsf{R}_2 = T^{\pi_2 \circ \pi_1}(\mathsf{R}_0) \in \mathfrak{K}^{T(1)}$.
Da es nur $k!$ viele Transformationsoperationen gibt (wenn k die Stelligkeit ist), gilt $\left|\mathfrak{K}^T\right| \leq k! \ |\mathfrak{K}|$.

$\square$(Beispiel 10)

Definition 50 (JEPD-Abschluß JEPD($\mathfrak{K}$)) *:*
*Der **JEPD-Abschluß** JEPD($\mathfrak{K}$) eines Kalküls $\mathfrak{K}$ ist die kleinste Verfeinerung von $\mathfrak{K}$ mit JEPD-Basis.*

Satz 51 (Existenz von $(\mathfrak{K})^d$) *:*
1. Für endliche Mengen existiert JEPD($\mathfrak{K}$) und ist endlich und konstruierbar.
2. Jeder vollständige JEPD-Kalkül ist abgeschlossen unter Mengendifferenz und endlichem Schnitt, also für je zwei Relationen $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2 \in \underline{R}(JEPD(\mathfrak{K}))$ ist auch $(\mathsf{R}_1 \setminus \mathsf{R}_2), (\mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2) \in \underline{R}$.
3. Wenn JEPD($\mathfrak{K}$) existiert, dann ist $(JEPD(\mathfrak{K}))^\cup = (\mathfrak{K})^{\{\top,\setminus\}}$ 4. Wenn $\mathfrak{K}$ permutationsvollständig ist, dann auch $JEPD(\mathfrak{K})$.

Beweis:
1. Sei $\underline{R}(\mathfrak{K}) = \{\mathsf{R}_i \mid i \in I\}$ Als Notation in diesem Beweis sei $\mathsf{R}_i^{(1)} = \mathsf{R}_i$, $\mathsf{R}_i^{(0)} = \mathsf{R}_i{}^C$ das Komplement. Dann ist

$$B(JEPD(\mathfrak{K})) = \{\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i^{(\iota_i)} \mid \iota_i \in \{0,1\}\}.$$

Diese Menge ist disjunkt, denn zwei verschiedene ihrer Elemente unterscheiden sich in einem ι_i und sind dabei Teilmengen von $\mathsf{R}_i^{(\iota_i)}, \mathsf{R}_i^{(1-\iota_i)}$ mit $\mathsf{R}_i^{(\iota_i)} \cap \mathsf{R}_i^{(1-\iota_i)} = \emptyset$. Diese Menge ist nach Bemerkung 15 eine Basis des von ihr erzeugten Kalküls. Sie ist erschöpfend, denn sei für ein Tupel t

$$\iota_i(t) = \begin{cases} 0 & ;\text{falls } t \in \mathsf{R}_i^{(0)} \\ 1 & ;\text{falls } t \in \mathsf{R}_i^{(1)} \end{cases},$$

dann gilt $t \in \bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i^{(\iota_i(t))}$.
Jedes R_i ist als Vereinigung $\mathsf{R}_i = \bigcup_{(\iota_j\in\{0,1\})_{j\in J}} (R_i^{(1)} \cap \bigcap_{j\in I\setminus i} \mathsf{R}_j^{(\iota_j)})$ erzeugbar. Jeder echt gröbere JEPD-Kalkül enthlt als Basisrelation die Vereinigung V von mindestens zwei dieser Mengen, die sich mindestens in einer Komponente ι_i unterscheiden müssen. Dann aber ist die zugehörige Relation R_i nicht erzeugbar, denn V enthält Tupel außerhalb von R_i, aber $t \in \mathsf{R}_i \cap V \Rightarrow t \notin \cup B(JEPD(\mathfrak{K})) \setminus V$ wegen der Disjunktheit.
Mächtigkeit von JEPD($\mathfrak{K}$):
Aus der angegebenen Darstellung von $B(JEPD(\mathfrak{K}))$ ergibt sich: Wenn $|\underline{R}(\mathfrak{K})| = n$, so ist $|B(JEPD(\mathfrak{K}))| \leq 2^n$ 2. Jeder vollständige disjunkt erzeugbare Kalkül ist abgeschlossen unter $\setminus$, denn sei mit geeigneten Basisrelationen b_i, c_j, d_k

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{R}_1 = \bigcup_{i\in I} b_i \cup \bigcup_{j\in J} c_j \\ & \mathsf{R}_2 = \bigcup_{i\in I} b_i \cup \bigcup_{k\in K} d_k \quad ;\forall i,j:\ d_j \cap c_k = \emptyset \\ \text{Dann} & \mathsf{R}_1 \setminus \mathsf{R}_2 = \bigcup_{i\in I} c_i \end{array}$$

Wegen $\mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2 = \mathsf{R}_1 \setminus (\mathsf{R}_1 \setminus \mathsf{R}_2)$ folgt aus Abgeschlossenheit unter $\setminus$ Abgeschlossenheit unter $\cap$.
3. $(JEPD(\mathfrak{K}))^{\cup} \supseteq (\mathfrak{K})^{\{\top,\setminus\}}$, denn nach 2. ist $(\mathfrak{K})^{\{\cup\}}$ als vollständiger JEPD-Kalkül unter $\setminus$ abgeschlossen und

$$\top = \bigcup_{b \in \mathcal{B}(JEPD(\mathfrak{K}))} b \in (JEPD(\mathfrak{K}))^{\cup}.$$

$(\mathfrak{K})^{\{\top,\setminus\}} \supseteq (JEPD(\mathfrak{K}))^{\cup}$, denn $\top$ ist erschöpfend, und wegen der Abgeschlossenheit unter $\setminus$ sind verschiedene Basisrelationen paarweise disjunkt, weil sonst eine Basisrelation b_1 als Vereinigung der Basisrelationen in $\mathsf{B}_1 \setminus \mathsf{B}_2$ und $\mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$ darstellbar wäre, im Gegensatz zur Minimalität. Die Vollständigkeit folgt, da $\mathsf{R}_1 \cup \mathsf{R}_2 = \top \setminus ((\top \setminus \mathsf{R}_1) \cap (\top \setminus \mathsf{R}_2))$. 4. Für surjektive unäre Operation t ist $t(\top) = \top$ und für jede injektive Operation t ist $t(\mathsf{R}_1 \setminus \mathsf{R}_2) = t(\mathsf{R}_1) \setminus t(\mathsf{R}_2)$. Jede Transformationsoperation $t \in T$ ist injektiv und surjektiv, daher gilt wegen $\mathsf{R}_i \in \mathfrak{K} \Rightarrow t(\mathsf{R}_i) \in \mathfrak{K}$ auch $\mathsf{R} \in (\mathfrak{K})^{\{\top,\setminus\}} \Rightarrow t(\mathsf{R}) \in (\mathfrak{K})^{\{\top,\setminus\}}$.

$\square$(Satz 51)

$JEPD(\mathfrak{K}^T)$ ist also eine permutationsvollständige JEPD-Verfeinerung von $\mathfrak{K}$, und erfüllt damit die ersten drei Kriterien. Der Rest dieser Arbeit motiviert sich durch die Suche nach einer Relationenalgebra, die möglichst viele dieser Kriterien untersucht. In Kapitel **??** untersuche ich die Frage, ob es Kalküle gibt, die Eigenschaften 1. - 4. haben. Danach untersuche ich die Ausdrucksmächtigkeit einiger Kalküle. Daraus ergeben sich Aussagen über die Definierbarkeit, die widerum in die abschließenden Untersuchungen zu den Komplexitätseigenschaften dieser Kalküle im Kapitel 7 eingehen werden.
Zunächst will ich jedoch die Klasse der RST-Kalküle, die ich in dieser Arbeit betrachte, in den Zusammenhang mit einer algebraischen Theorie für Kalküle bringen, die ich dann wieder auf die RST-Kalküle anwenden will.
Ich werde nun also von meinem Startpunkt aus, den ich nun dargestellt habe, über den Weg einer allgemeinen Theorie für die Klasse der RST-Kalküle in Richtung auf mein Ziel marschieren, das Ziel, durch Verfeinerung und Vervollständigung bekannter Kalküle zu verbesserten Kalkülen zu kommen.

Kapitel 3

Relationenalgebren

Um Aussagen über die Beschreibbarkeit von Kalkülen nutzen zu können ist es erstrebenswert, ein Kalkül zu betrchten, in dem es Operationen gibt, die den Konstrukten im Kalkül der Logik erster Stufe entsprechen, so wie die Vereinigung von Relationen der Disjunktion entspricht (vgl. Bemerkung 46). Insbesondere soll das Kalkül Operatoren für die Negation (das ist die Komplementoperation) und für Existenzquantoren besitzen. Das Ziel dieses Kapitels soll sein, eine Bezeichnung und einen Startpunkt für eine Theorie für in diesem Sinne aussagekräftige Kalküle einzuführen.
Bisher gibt es noch überhaupt keine formale Theorie für die allgemeine Beschreibung dreistelliger Kalküle [IH00], in denen die Operatoren Vereinigung, Schnitt, Transformationsoperation und Komposition vorkommen und über der Vereinigung distributieren, wie dies in den von mir betrachteten Kalkülen der Fall ist. Roger Maddux und Peter Ladkin [PL94, Mad91] stellen eine solche algebraische Beschreibung nur für binäre Kalküle vor. Kernpunkt ist die Definition binärer Relationenalgebren:

Definition 52 (Binäre Relationenalgebren) *:*
Eine Algebra

$$\mathfrak{A} = (A, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, \top, \circ, \cdot^{\smile}, \{eq\})$$

heißt (binäre) ***Relationenalgebra*** *, falls wenn sie Erweiterung einer Booleschen Algebra* $(A, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, \top)$ *um einen binären Operator* ***Komposition*** $\circ$*, einen unären Operator* ***Konversion*** $^{\smile}$ *und einen nullstelligen Operator*

Identitätselement $\{eq\}$ *ist und gilt:*

$(bR1)$	*Assoziativgesetz*	$(R_1 \circ R_2) \circ S \;=\; R_1 \circ (R_2 \circ S)$,
$(bR2)$	*Distributivgesetz für* $\circ$	$(R_1 \cup R_2) \circ S \;=\; (R_1 \circ S) \cup (R_2 \circ S)$,
$(bR3)$	*Identitätseigenschaft*	$R \circ \{eq\} \;=\; R \;=\; \{eq\} \circ R$,
$(bR4)$	*Involution von* $\smile$	$(R^{\smile})^{\smile} \;=\; R$,
$(bR5)$	*Distributivgesetze für* $\smile$	$(R \cup S)^{\smile} \;=\; R^{\smile} \cup S^{\smile}$,
$(bR6)$		$(R \circ S)^{\smile} \;=\; S^{\smile} \circ R^{\smile}$,
$(bR7)$	De Morgan*s Theorem K*	$R^{\smile} \circ \overline{R \circ S} \cap S \;=\; \emptyset$.

Daraus ergeben sich unter anderem die in Relationenalgebren geltenden Folgerungen

1. $\overline{R}^{\smile} \;=\; \overline{R^{\smile}}$,
2. $\{eq\}^{\smile} \;=\; \{eq\}$, $\quad \emptyset^{\smile} \;=\; \emptyset$, $\quad \top^{\smile} \;=\; \top$,
3. $(R \cap S)^{\smile} \;=\; R^{\smile} \cap S^{\smile}$,
4. $R \subset S \Longrightarrow R^{\smile} \subset S^{\smile}$,
5. $R_1 \subset R_2 \Longrightarrow R_1 \circ S \subset R_2 \circ S \quad S \circ R_1 \subset S \circ R_2$

Um analoge Eigenschaften nicht alle für ternäre Kalküle nachweisen zu müssen, werde ich in diesem Kapitel bestehende algebraische Strukturen verallgemeinern, k-stellige Relationenalgebren definieren und aus der Definition weitere Eigenschaften herleiten. Dabei werde ich für die von mir betrachteten Kalküle die Operatoren so definieren, daß die entstehende Algebra eine Relationenalgebra ist, so daß man für alle meine Kalküle, die auf diese Relationenalgebren zurückgeführt werden können, die Eigenschaften der Relationenalgebren ausnutzen kann.

3.1 Zylindrifikationen

Meine Relationenalgebren sollen so definiert sein, daß sie P. Ladkin und R. Maddux' Relationenalgebren als Spezialfall beinhalten. Dabei benötige ich Erweiterungen Boolscher Algebren auf n-stellige Relationen, die von A. Tarski und Thompson in [Tar77], [Tar41] als ***zylindrische Algebren*** eingeführt wurden. Sie enthalten zusätzlich je einen Operator für Existenzquantifizierung einer Koordinate (Variable), diese heißen "***Zylindrifikationen***" c_κ, und für Gleichheitsrelationen für jeden Vergleich von Koordinaten (Variablen), diese heißen Diagonalisierungen $d_{\kappa\lambda}$.
Die zylindrischen Algebren bilden quasi eine algebraische Repräsentation der Prädikatenlogik erster Stufe (vgl. [LHT71], [BS81], [Mad91]).

Definition 53 (Zylindrische Algebra) *:*
Für ein festes $d \in \mathbb{N}$, heißt eine Algebra

$$\mathfrak{C} \;=\; (R, \cup, \cap, \bar{\cdot}, c_0, \ldots, c_d, \emptyset, \top, \mathrm{d}_{1,1}, \ldots, \mathrm{d}_{d,d})$$

*mit zwei binären Operatoren, $(n+1)$ unären Operatoren und (n^2+2) nullstelligen Operatoren (Relationenkonstanten), eine **zylindrische Algebra** , falls gilt:*
(C1): $(R, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, \top)$ *ist* B*oolsche Algebra.*
(C2): $c_\kappa(\emptyset) \;=\; \emptyset$
(C3): $\mathsf{R} \subset \; c_\kappa(\mathsf{R})$*)*
(C4): $c_\kappa(\mathsf{R}_1 \cap c_\kappa(\mathsf{R}_2)) \;=\; (c_\kappa(\mathsf{R}_1)) \cap (c_\kappa(\mathsf{R}_2))$
(C5): $c_\kappa(c_\lambda(\mathsf{R})) \;=\; c_\lambda(c_\kappa(\mathsf{R}))$
(C6): $\mathrm{d}_{\kappa\kappa} \;=\; \top$
(C7): $\mathrm{d}_{\kappa\lambda} \;=\; c_\mu(\mathrm{d}_{\kappa\mu} \cap \mathrm{d}_{\mu\kappa}$ *; falls* $\kappa \neq \mu \neq \lambda$
(C8): $c_\kappa(\mathrm{d}_{\kappa\lambda} \cap \mathsf{R}) \cap c_\kappa(\mathrm{d}_{\kappa\lambda} \cap \overline{\mathsf{R}}) = \emptyset$ *; falls* $\kappa \neq \lambda$

Die intendierte Semantik ist dabei, daß die ***Zylindrifikation*** c_κ die Relation ist, die als Realisation θ an Position κ alle Werte des Universums zuläßt, und auf den übrigen Positionen die Teiltupel, die in mindestens einem Tupel der Relation autauchen, also

$$\begin{aligned}(p_1, \ldots, p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad & \exists q_\kappa : s_\kappa(q_\kappa(p_1, \ldots, p_k) \\ & := \; (p_1, \ldots, p_{\kappa-1}, q_\kappa, p_{\kappa+1}, \ldots, p_k) \in \mathsf{R},\end{aligned}$$

wobei $(s_\kappa(q))(p_1, \ldots, p_k)$ die ***Substitution*** des κ-ten Elements in dem Tripel durch q bezeichne. Diese Operationen c_κ heißen Zylindrifikationen, weil sie einen k- dimensionalen Zylinder über der Projektion von R auf die Koordinaten $\neq \kappa$ darstellt.

Die ***Diagonalisierung*** $\mathrm{d}_{\kappa\lambda}$ bezeichnet die Relation, bei denen die Elemente jeweils an Positionen κ und λ gleich sind:

$$(p_1, \ldots, p_k) \in \mathrm{d}_{\kappa\lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad p_\kappa \;=\; p_\lambda$$

Sie heißen Diagonalisierungen, weil sie genau aus den Tupeln bestehen, deren Projektion auf die Ebene, die von den Koordinaten κ und λ aufgespannt werden, auf der Diagonale liegen. (Vgl. Abbildung 3.1)
Man überzeugt sich leicht, daß diese Semantik die Axiome erfüllt.

Auf Kalküle übertragen, ermöglichen sie es, Aussagen über einzelne Elemente in den Relationen zu treffen, und somit durch die Informationen aus den Relationen herauszuholen, die implizit in ihnen enthalten sind, denn wegen (C3)

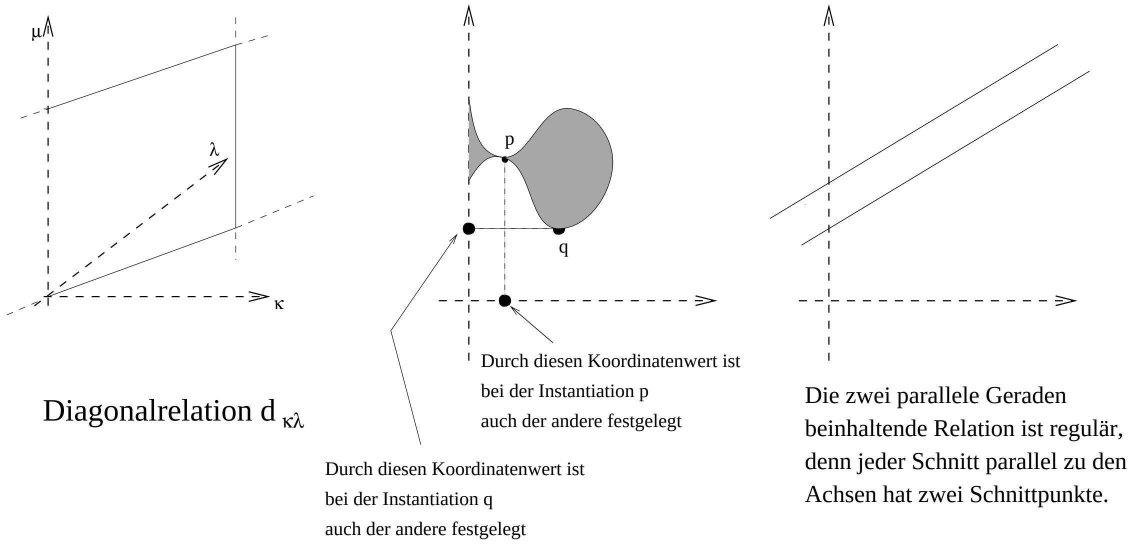


Abbildung 3.1: a. Diagonalrelation b. eine weitere singuläre Relation c. eine reguläre Relation.

folgt aus $t \in \mathsf{R} \Rightarrow t \in c_\kappa(\mathsf{R})$ für alle $\kappa \leq k$. Beispielsweise erhält man aus R durch Anwendung von c_1 die Information, die man erhält, wenn man die Infomation über das erste Element "vergißt".

<u>Beispiel:</u>
Seien $\{u_1, \ldots, u_4\} = U$ mögliche Werte für die Elemente in einem Kalkül, und R die Relation $\{(u_1,u_2,u_3),(u_1,u_2,u_1),(u_2,u_2,u_2),(u_2,u_2,u_3)\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} c_3(\mathsf{R}) \;=\; \{ \quad & (u_1,u_2,u_1),(u_1,u_2,u_2),(u_1,u_2,u_3),(u_1,u_2,u_4), \\ & (u_2,u_2,u_1),(u_2,u_2,u_2),(u_2,u_2,u_3),(u_2,u_2,u_4)\,\} \end{aligned}$$

und

$$c_1(c_3(\mathsf{R})) \;=\; c_3(c_1(\mathsf{R})) \;=\; \{(x,u_2,z) \mid x,z \in U\}.$$

Denn implizit steckt in R die Information, daß das zweite Element gleich u_2 ist, und daß das erste Element u_1 oder u_2 sein muß. Und

$$\mathfrak{d}_{12} \cap \mathfrak{d}_{23} \;=\; \mathfrak{d}_{12} \cap \mathfrak{d}_{13} \;=\; \mathfrak{d}_{13} \cap \mathfrak{d}_{23} \;=\; \{(x,x,x) \mid x \in U\}.$$

Dieser Schnitt entspricht der Relation $\{\mathit{eq}\}$ im ternären Gleichheitskalkül $\mathfrak{E}q$.

Eine Folgerung aus diesen Axiomen ist die Aussage ([LHT71]):

$$c_\kappa(\mathsf{R} \cup \mathsf{S}) \;=\; c_\kappa(\mathsf{R}) \cup c_\kappa(\mathsf{R})$$

Deshalb genügt es, die Zylindrifikationen auf den Basisrelationen zu betrachten, denn die Zylindrifikationen sind auf Kaklülen, die zugleich Zylindrische Algebren sind, auf den Basisrelationen vollständig definiert.

Beispiel 11 (Zylindrifikationen der Basisrelationen von $\mathfrak{DC}$) *:*
In diesem Fall ist $k = 3$ *und*
$c_1(\{\mathsf{eq}\}) = c_1(\{\mathsf{e}_{23}\}) = c_1(\mathsf{d}_{23}) = \mathsf{d}_{23}$*, sonst* $c_1(\mathsf{R}) = \overline{\mathsf{d}_{23}}$
$c_2(\{\mathsf{eq}\}) = c_2(\{\mathsf{e}_{13}\}) = c_2(\mathsf{d}_{13}) = \mathsf{d}_{13}$*, sonst* $c_1(\mathsf{R}) = \overline{\mathsf{d}_{13}}$
$c_3(\{\mathsf{eq}\}) = c_3(\{\mathsf{e}_{12}\}) = c_3(\mathsf{d}_{23}) = \mathsf{d}_{23}$*, sonst* $c_1(\mathsf{R}) = \overline{\mathsf{d}_{12}}$
Für jedes R $c_1(c_2(\mathsf{R})) = c_2(c_3(\mathsf{R})) = c_3(c_1(\mathsf{R})) = \top$

Daraus ergibt sich, daß alle Zylindrifikationen von Relationen $\neq \emptyset$ aus $\mathfrak{RC}$ entweder Diagonalrelationen oder Komplemente von Diagonalrelationen oder ganz $\top$ sind

3.2 Singuläre und reguläre Relationen

Definition 54 (singuläre und reguläre Relationen) *:*
Eine k*-stellige Relation* R *heißt* ***singulär*** *, falls gilt:*

$$\exists \kappa : (p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{R} \wedge s_\kappa(q)(p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{R} \quad \Longrightarrow \quad p_\kappa = q$$

Das heißt, es gibt genau in den singulären Relationen ein Element der Relation, das in jeder gegeben Realisation durch die anderen bestimmt ist.
Eine nicht singuläre Relationen heißt ***regulär*** *. Dann gilt*

$$\forall \kappa : (p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{R} \quad \Longrightarrow \quad \exists p'_\kappa \neq p_\kappa : s_\kappa(p'_\kappa)(p_1, \ldots, p_k) \in \mathsf{R}$$

Das heißt, für jede Menge von $k-1$ *Elementen gibt es für jede konsistente Instantiation mindestens zwei realisierende Erweiterungen auf alle* k *Elemente der Relation. (Vgl. Abbildung 3.1)*

Beispiel 12 (Diagonalelemente und Zylindrifikationen) *:*
1. Unterrelationen der Diagonalelemente sind singuläre Relationen.
2. Wenn $|U| \geq 2$*, dann ist für jede reguläre Relation* R *und jede Position* κ $c_\kappa(\mathsf{R})$ *regulär.*
3. In $\mathfrak{DC}$ *sind alle Relationen, die nicht Unterrelation der Diagonalrelation sind (und damit nach 1. genau diese), regulär.*

Beweis:
1. Für jede Realisation $(p_1, \ldots, p_k)$ einer Unterrelation der Diagonalrelation $\mathsf{d}_{\kappa\lambda}$ gilt: $p_\kappa = p_\lambda$. Das bedeutet aber, daß p_λ schon durch p_κ, also durch die übrigen Punkte eindeutig bestimmt ist.

2. zu zeigen ist: Für alle λ $(p_1, \dots, p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R}) \Rightarrow \exists p_\lambda' \neq p_\lambda : (p_1, \dots, p_{\lambda-1}, p_\lambda', p_{\lambda+1}, \dots, p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R})$.

1. Fall: $\lambda = \kappa$

$$\begin{aligned}(p_1, \dots, p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R}) &\iff \exists p_\kappa' : s_\kappa(p_\kappa')(p_1, \dots, p_k) \in \mathsf{R} \\ &\implies \exists p_\kappa'' : s_\kappa(p_\kappa'')(p_1, \dots, p_k) \in \mathsf{R} \subset c_\kappa(\mathsf{R})\end{aligned}$$

mit $p_\kappa'' \neq p_\kappa'$, weil R regulär. Wegen $p_\kappa'' \neq p_\kappa'$, gilt $p_\kappa' \neq p_\kappa$ oder $p_\kappa'' \neq p_\kappa$.

2. Fall: $\lambda \neq \kappa$

$$(p_1, \dots, p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R}) \iff \exists p_\kappa' : (p_1, \dots, p_{\kappa-1}, p_\kappa', p_{\kappa+1}, \dots, p_k) \in \mathsf{R}$$

Dann

$$\exists p_\lambda' : \exists p_\kappa' : p_1, \dots, p_{\kappa-1}, p_\kappa', p_{\kappa+1}, \dots, p_{\lambda-1}, p_\lambda', p_{\lambda+1}, \dots, p_k) \in \mathsf{R} \text{ mit } p_\lambda' \neq p_\lambda,$$

weil R regulär ist. Folglich

$$(p_1, \dots, p_{\lambda-1}, p_\lambda', p_{\lambda+1}, \dots, p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R}).$$

3. Die $\mathfrak{DC}$-Relationen, die nicht Teilrelationen der Diagonalrelationen sind, sind als Schnitt zweier durch Winkelbereiche gegebener Mengen definiert. Wenn beide Winkelbereiche auf exakten Winkel basieren, dann sind sie Vielfache von 90^o und schneiden sie sich entweder gar nicht oder in einer Halbgeraden, die Relation ist also regulär. Andernfalls exisitieren zu je zwei Punkten in $\mathbb{R}^2$ zu jeder Realisierung der einen möglicherweise exakten Winkelbedingung in jeder Umgebung des dritten Punktes weitere Realisierungen des gleichen Winkels (auf einem Kreisbogen durch die beiden instanzierten Punkte oder auf einer Halbgeraden durch einen von diesen.). Diese erfüllen, wenn die Umgebung klein gewählt wird, auch die andere Winkelbedingung, deren Bereich eine offene Menge ist.

$\square$(Beispiel 12)

3.3 Kompositionen

Ich übertrage den Begriff der als zweistellige Operation von binären Relationenalgebren auf ternäre Relationenalgebren, sodaß alle beteiligten Relationen, also die zwei Operanden-Relationen und die resultierende Relation, ternär sind.

Dafür sind zwei grundsätzlich verschiedene Schemata denkbar, die ich im weiteren ***lose Komposition*** und ***steife Komposition*** nennen werde. Bei der losen Komposition gibt es nur 1 Element, das an beiden Operanden beteiligt ist, und bei der steifen Komposition sind zwei Elemente an beiden Operanden beteiligt. Diese Elemente heißen von nun an ***Link-Elemente*** . Alle anderen Elemente sind entweder ***firstop-Elemente*** (genau dann, wenn sie nur am ersten Operanden beteiligt sind) oder ***secondop-Elemente*** (genau dann, wenn sie nur am zweiten Operanden beteiligt sind).
Betrachten wir nun die lose Komposition zuerst. Da die Anzahl der Elemente, die an der resultierenden Operation beteiligt sind, stets gleich 3 ist, gibt es dafür diese acht natürlichen Möglichkeiten:

Definition 55 (Lose Komposition) *(vgl. Abbildung 3.2):*

$$\begin{array}{rlclcl}
1. & (v,w,x) & \rhd_1 & (x,y,z) & = & (v,w,y) \\
2. & (v,w,x) & \rhd_2 & (x,y,z) & = & (v,w,z) \\
3. & (v,w,x) & {}_1\lhd & (x,y,z) & = & (v,y,z) \\
4. & (v,w,x) & {}_2\lhd & (x,y,z) & = & (w,y,z) \\
5. & (v,w,x) & {}_1\bowtie_1 & (x,y,z) & = & (v,x,y) \\
6. & (v,w,x) & {}_1\bowtie_2 & (x,y,z) & = & (v,x,z) \\
7. & (v,w,x) & {}_2\bowtie_1 & (x,y,z) & = & (w,x,y) \\
8. & (v,w,x) & {}_2\bowtie_2 & (x,y,z) & = & (w,x,z)
\end{array}$$

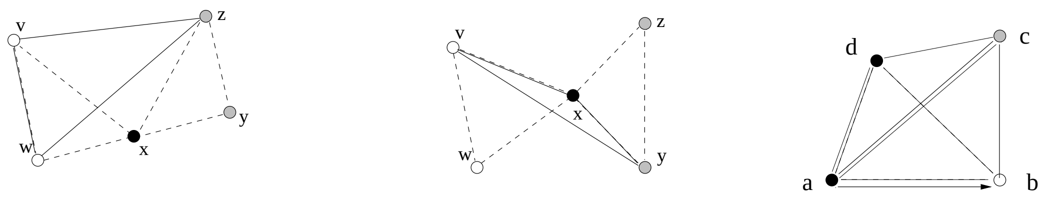
heßen **lose Kompositionen**, *wobei*

$$\begin{array}{l}
(v,w,y) \in \mathsf{R}_1 \rhd_1 \mathsf{R}_2 :\Leftrightarrow \exists\, x,z : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \textit{ und } (x,y,z) \in \mathsf{R}_2, \\
(v,w,z) \in \mathsf{R}_1 \rhd_2 \mathsf{R}_2 :\Leftrightarrow \exists\, x,y : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \textit{ und } (x,y,z) \in \mathsf{R}_2, \\
(v,y,z) \in \mathsf{R}_1\, {}_1\lhd\, \mathsf{R}_2 :\Leftrightarrow \exists\, w,x : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \textit{ und } (x,y,z) \in \mathsf{R}_2, \\
(w,y,z) \in \mathsf{R}_1\, {}_2\lhd\, \mathsf{R}_2 :\Leftrightarrow \exists\, v,x : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \textit{ und } (x,y,z) \in \mathsf{R}_2.
\end{array}$$

Die letzten vier heißen ***symmetrische lose Kompositionen*** *, denn es gibt genau ein firstop-Element, genau ein Link-Element, und genau ein secondop-Element, das an der resultierenden Relation beteiligt ist, z. B. für* ${}_1\bowtie_1$ *Secondop-Element. Die ersten vier Kompositionen werden* ***unsymmetrische lose Kompositionen*** *heißen.*

Anmerkung:
Offensichtlich kann in einer permutationsvollständigen Relationenalgebra jede lose Komposition von jeder anderen losen Komposition abgeleitet werden, wenn die Transformationen aller Relationen bekannt sind. Beispielsweise,
$\mathsf{R}_1 \rhd_2 \mathsf{R}_2 \;=\; \mathsf{R}_1 \rhd_1 (\mathsf{R}_2)^{(12)}$ und $\mathsf{R}_1\, {}_1\lhd\, \mathsf{R}_2 \;=\; ((\mathsf{R}_2)^{(231)} \rhd_1 (\mathsf{R}_1)^{(321)})^{(321)}$.

Betrachten wir nun die **steifen Kompositionen**. Sie heißen steife Kompositionen, weil die beiden Operanden zwei Elemente gemeinsam haben. Daher



a. Unsymmetrische lose Komposition, z.B. rel(vwx) |> rel(xyz)= rel(vwz)

b. Symmetrische lose Komposition, z.B. rel(vwx) |> rel(xyz)= rel(vxy)

c. Die steife Komposition, rel(abd) $_3{<>}_2$ rel(adc) = rel(abc)

Die Beziehungen der Operandenrelation sind gestrichelt bzw. gepunktet dargestellt,
Die resultierende Relation ist durch die durchgezogenen Linien dargestellt.
Schwarze Punkte stellen Link-Elemente dar, weiße Punkte Firstop- und graue Punkt Secondop-Elemente.

Abbildung 3.2: Die lose Komposition a. unsymmetrisch b. symmetrisch c. Die steife Komposition

legt für jede Komposition jede Instantiation der einen Operanden-Relation zwei Punkte der anderen fest und bei singulären Relationen kann es vorkommen, daß sie auch den letzten Punkt bestimmt. In den Kalkülen der binären Relationenalgebren wird die Komposition üblicherweise genutzt, um den Einfluss externer Punkte auf eine Relation zu bestimmen, beispielsweise durch Anwendung eines Algorithmus, der die binäre Relation zwischen a und b nacheinander mit allen Kompositonen $(a,d);(b,d)$ schneidet, wobei d ein anderes Element ist. Die steifen Kompositionen haben die Eigenschaft, daß es nur ein Element gibt, das an der Komposition beteiligt ist, aber nicht an der resultierenden Relation, und dieses eine ist ein Link-Element. Je nachdem, welche Position dieses Element in den beiden Operanden einnimmt, unterscheide ich die folgenden sechs steifen Kompositionen:

Definition 56 ((steife) Komposition) *:*
Die Operationen

$$\begin{array}{rrcl}
1. & Rel(a,b,d)\ {}_3\diamond_2\ Rel(a,d,c) & = & Rel(a,b,c), \\
2. & Rel(a,d,c)\ {}_2\diamond_1\ Rel(d,b,c) & = & Rel(a,b,c), \\
3. & Rel(a,b,d)\ {}_3\diamond_1\ Rel(d,b,c) & = & Rel(a,b,c), \\
4. & Rel(d,b,c)\ {}_1\diamond_2\ Rel(a,d,c) & = & Rel(a,b,c), \\
5. & Rel(d,b,c)\ {}_1\diamond_3\ Rel(a,b,d) & = & Rel(a,b,c), \\
6. & Rel(a,d,c)\ {}_2\diamond_3\ Rel(d,b,c) & = & Rel(a,b,c)
\end{array}$$

mit der Semantik

$$(a,b,c) \in \mathsf{R}_1\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_2 :\iff \exists\, d : (s_\kappa(d))(a,b,c) \in \mathsf{R}_1 \text{ und } (s_\lambda(d))(a,b,c) \in \mathsf{R}_2$$

heißen ***steife Kompositionen*** .

In der Komposition $\;_{3}\diamond_{2}$, besetzt d die dritte Position (Zielelement) im ersten Operanden und die zweite Position (Referenzelement) im zweiten Operanden.
Anmerkung:
Die Komposition sind nur über Relationen definiert, deren zugehörige Tripel zwei Punkte gemeinsam haben. Denn dadurch taucht eine gemeinsame Richtung in beiden Tripeln auf, mit deren Hilfe die in Bezug auf die beiden Operanden vorhandene Information zu einer neuen Information eingebunden werden kann. Falls aber nur ein Punkt oder gar kein Punkt in beiden Operanden gemeinsam auftritt, sind die Informationen über relative Richtungen völlig unabhängig voneinander.
Weil eines der Elemente der resultierenden Relation auch in beiden Operanden auftaucht, kann die gleiche Komposition mehrfach hintereinander ausgeführt werden, immer unter Verwendung des Ergebnissen von einer Komposition als einem der Operanden für die nächste. Also macht es Sinn, das Assoziativgesetz zu fordern, nämlich daß Für jede Relationen $\mathsf{R},\ \mathsf{S},\ \mathsf{T}$, $0 < \kappa \neq \lambda \leq 3$:
$(\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S})\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{T} \ = \ \mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ (\mathsf{S}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{T}\ )$.

Alle diese Aspekte führen mich zu folgender Definition der Verallgemeinerung der Relationenalgebren:

3.4 k-stellige Relationenalgebren

Definition 57 (Relationenalgebren) *:*
*Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ (k heißt **Stelligkeit**), heißt eine Algebra*

$$\mathfrak{K} \ = \ (R, \cup, \cap, \bar{\cdot}, c_0, \ldots, c_k, \emptyset, \top, \mathrm{d}_{1,1}, \ldots, \mathrm{d}_{k,k}, T^{\pi_1}, \ldots T^{\pi_k!},\ {}_{1}\diamond_{1}\ ,\ {}_{1}\diamond_{2}\ , \ldots\ {}_{k}\diamond_{k}\ )$$

*mit (k^2+2) binären Operatoren, $(k!+k+1)$ unären Operatoren und (k^2+2) nullstelligen Operatoren (Relationenkonstanten), eine k-stellige **Relationenalgebra** , falls gilt:*

$$\mathfrak{K}\,' \ = \ (R, \cup, \cap, \bar{;} c_\kappa, \emptyset, \top, \mathrm{d}_{\kappa\lambda})$$

ist eine k-dimensionale zylindrische Algebra, und $\mathfrak{K}$ ist Erweiterung von $\mathfrak{K}\,'$ um folgende zusätzliche Operationen: Für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_k$, (symmetrische Gruppe) eine unäre Transformationsoperation T^π und für jeweils $\kappa, \lambda \leq k$ eine binäre Kompositionsoperation $\;_{\kappa}\diamond_{\lambda}$, für die die folgenden Eigenschaften gelten:

Für die Transformationsoperationen:
(RA1). Distributivgesetze (Verallgemeinerung von (bR5):

$$T^\pi(\bigcup_{i\in I} R_i) \ = \ \bigcup_{i\in I} T^\pi(R_i)$$

und

$$T^{\pi}(\bigcap_{i\in I} R_i) \;=\; \bigcap_{i\in I} T^{\pi}(R_i)$$

(RA2). Homomorphie (Verallgemeinerung von (bR4):

$$T^{\pi_1}(T^{\pi_2}(\mathsf{R})) \;=\; T^{\pi_1\circ\pi_2}(R)$$

(RA3). $T^{id} \;=\; ID(Verallgemeinerungvon(bR5):$
Für jede Relation $\mathsf{R} \in R$ *gilt:*

$$T^{id}(\mathsf{R}) \;=\; \mathsf{R}$$

(RA4). Erhalt von 0- und 1-Element (Verallgemeinerung von (bR4): für jede Transformationsoperation

$$T^{\pi}(\emptyset) = \emptyset \quad \mathit{und} \quad T^{\pi}(\top) = \top \qquad \mathit{und} \qquad T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{d}_{\kappa\lambda}) = \mathsf{d}_{\kappa\lambda}.$$

Und für die Kompositionen:
(RA5). Für alle Relationen $\mathsf{R}_1,\ \mathsf{R}_2 \in R$ *und* $0 < \kappa, \lambda \leq k$ *gilt:*

$$\mathsf{R}_1 \ {}_{\kappa}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{R}_2 \;=\; c_{\kappa}(\mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2)$$

(RA6). Für alle Relationen $\mathsf{R}_1,\ \mathsf{R}_2$ *und* $0 < \kappa, \lambda \leq k$*:*

$$\mathsf{R}_1 \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R}_2 \;=\; \mathsf{R}_2 \ {}_{\lambda}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{R}_1$$

(RA7). Assoziativgesetz:
Für alle $0 < \kappa \neq \lambda \leq k$ *und Relationen* R_i *gilt:*

$$(\mathsf{R}_1 \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R}_2) \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R}_3 \;=\; \mathsf{R}_1 \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ (\mathsf{R}_2 \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R}_3)$$

(RA8). Distributivgesetz für Vereinigung von Relationen:
Für jede κ, λ *und Relationen* $\mathsf{R}_i,\ \mathsf{S}$ *gilt:*

$$(\bigcup_{i\in I} \mathsf{R}_i) \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} \;=\; \bigcup_{i\in I} (\mathsf{R}_i \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S})$$

(RA9). Semi-Distibutivgesetz für Schnitt von Relationen
Für jede κ, λ *und Relationen* $\mathsf{R}_i,\ \mathsf{S}$ *gilt:*

$$(\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i) \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} \subset \bigcap_{i\in I} (\mathsf{R}_i \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S})$$

(RA10). Spezialfall: Für jede κ, λ *und jede Relation* R*:*

$$\mathsf{R} \ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \top \;=\; c_{\kappa}(\mathsf{R})$$

(RA11). Für alle Relationen R, S, $\kappa \neq \lambda$*:*

$$c_\kappa(\mathsf{R}) \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S} \;=\; \mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}$$

(RA12). Komposition von Diagonalrelationen:
Für alle Relationen R, $\kappa \neq \lambda$*:*

$$\mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathbb{d}_{\kappa\lambda} \;=\; \mathsf{R}.$$

(RA13). Für alle $0 \leq \kappa, \lambda, \mu \leq k$*:*

$$d_{\kappa\lambda} \;{}_\kappa\diamond_\mu\; \mathbb{d}_\lambda\mu \;=\; \top$$

(RA14). Für alle Relationen R, $\kappa \neq \lambda$ *ist* $(\mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R})\,)$ *Semi-Einselement:*

$$\mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R}) \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{R} \supset \mathsf{R}$$

(RA15). Transformation von Kompostionen (Verallgemeinerung von (bR6):

$$T^\pi(\mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}) \;=\; T^\pi(\mathsf{R}) \;{}_{\pi^{-1}(\kappa)}\diamond_{\pi^{-1}(\lambda)}\; T^\pi(\mathsf{S})$$

Bemerkung 58 (Eigenschaften von Relationenalgebren) *:*
Wenn $\mathfrak{K}$ *eine Relationenalgebra ist, dann gilt:*
1. Inverse Transformationsoperation:
Zu jeder Transformationsoperation T *existiert eine inverse Transformationsoperation* T^{-1} *mit* $T^{-1}(T) \;=\; ID$*, und es gilt* $(T^\pi)^{-1} \;=\; T^{\pi^{-1}}$

2. ***Konvertierungssatz*** *:* $\forall \kappa_1, \lambda_1, \kappa_2, \lambda_2 \leq k$ *:*

$$\mathsf{R} \;{}_{\kappa_2}\diamond_{\lambda_2}\; \mathsf{S} \;=\; (\mathsf{R}^\pi \;{}_{\kappa_1}\diamond_{\lambda_1}\; \mathsf{S}^\pi)^{\pi^{-1}},$$

wobei $\pi \in \mathfrak{S}$ *die Permutation ist, für die gilt:*

$$\pi(\kappa_1) \;=\; \kappa_2 \quad \pi(\lambda_1) \;=\; \lambda_2.$$

Weiterhin gilt für jede Transformationsoperation T^π *und alle Relationen* R, S, $\mathsf{R}_i, \mathsf{S}_i \in R$*, und* $0 < \kappa, \lambda \leq k$*:*

3. Komplement unter Transformationsoperation:

$$T^\pi(\overline{\mathsf{R}}) \;=\; \overline{T^\pi(\mathsf{R})}$$

4. Erhalt der Gleichheit und Teilmengenbeziehung:

$$\begin{array}{rcl} T^\pi(\mathsf{R}) = T^\pi(\mathsf{S}) & \Longleftrightarrow & \mathsf{R} = \mathsf{S} \\ T^\pi(\mathsf{R}) \subset T^\pi(\mathsf{S}) & \Longleftrightarrow & \mathsf{R} \subset \mathsf{S} \end{array}$$

5. Zu allen Bedingungen in der Definition gilt wegen (RA6) auch ein symmetrisches, so folgen aus (RA8),(RA9) die umgekehrten Disributivgesetze (Beweis durch Vertauschen von κ und λ):

(RA8') $\quad \mathsf{S}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ (\bigcup_{i\in I} \mathsf{R}_i) = \bigcup_{i\in I} (\mathsf{S}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R}_i)$

(RA9') $\quad \mathsf{S}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ (\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i) \subset \bigcap_{i\in I} (\mathsf{S}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R}_i)$

und außerdem gilt

(RA10') $\quad \mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \top = c_\kappa(\mathsf{R})$ *und* $\top\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R} = c_\lambda(\mathsf{R})$,

(RA11') $\quad \kappa \neq \lambda \Rightarrow \; c_\kappa(\mathsf{R})\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} = \mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} = \mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ c_\lambda(\mathsf{S})$

(RA12') $\quad \mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathbb{d}_{\lambda\kappa} = \mathsf{R} = \mathbb{d}_{\lambda\kappa}\ {}_{\lambda}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{R}$

(Die übrigen Aussagen (RA 7), (RA 13), (RA 14), (RA 15) sind symmetrisch.)

6.

$$T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S}) = T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{S})\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R})$$

7.

$$T^\pi(c_\kappa(\mathsf{R})) = c_{\pi^{-1}(\kappa)}(T^\pi(\mathsf{R}))$$

8.

$$c_\lambda(\mathsf{R}) = T^{(\kappa\lambda)}(c_\kappa(T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R})))$$

9.

$$\begin{array}{c} (\mathsf{R}_1 \subset \mathsf{R}_2) \Longleftrightarrow (\mathsf{R}_1\ {}_{\lambda}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{S}) \subset (\mathsf{R}_2\ {}_{\lambda}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{S}) \\ (\mathsf{S}_1 \subset \mathsf{S}_2) \Longleftrightarrow (\mathsf{R}\ {}_{\lambda}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{S}_1) \subset (\mathsf{R}\ {}_{\lambda}\diamond_{\kappa}\ \mathsf{S}_2) \end{array}$$

10.

$$\emptyset\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{R} = \emptyset = \mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \emptyset$$

11.

$$\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} \subset c_\kappa(\mathsf{R}) \cap c_\lambda(\mathsf{S})$$

Wegen (RA1), (RA8), (RA8'), genügt es, die Transformationsoperationen und Komposition von Relationenalgebren auf Basisrelationen zu definieren.

Beweis:
1. Nach Eigenschaft (RA2) und (RA3) gilt

$$T^\pi(T^{\pi^{-1}}) \overset{RA2}{=} T^{\pi\circ\pi^{-1}} = T^{id} \overset{(RA3)}{=} ID.$$

2. Wegen 1. gilt, weil $\pi^{-1}(\kappa_1) = \lambda_1$ und $\pi^{-1}(\kappa_2) = \lambda_2$:

$$\mathsf{R}\ {}_{\kappa_2}\diamond_{\lambda_2}\ \mathsf{S} \overset{1.}{=} T^{\pi^{-1}}(T^\pi(\mathsf{R}\ {}_{\kappa_2}\diamond_{\lambda_2}\ \mathsf{S})) \overset{(RA15)}{=} T^{\pi^{-1}}(T^\pi(\mathsf{R})\ {}_{\kappa_1}\diamond_{\lambda_1}\ T^\pi(\mathsf{S})).$$

3.

$$T^\pi(\mathsf{R}) \cap T^\pi(\overline{\mathsf{R}}) \overset{(RA1)}{=} T^\pi(\mathsf{R} \cap \overline{\mathsf{R}}) \overset{Boolsche Alg.}{=} T^\pi(\emptyset) \overset{(RA4)}{=} \emptyset$$

$$\text{und } T^\pi(\mathsf{R}) \cup T^\pi(\overline{\mathsf{R}}) \overset{(RA1)}{=} T^\pi(\mathsf{R} \cup \overline{\mathsf{R}}) \overset{Boolsche Alg.}{=} T^\pi(\top) \overset{(RA4)}{=} \top$$

Daraus folgt $T^\pi(\overline{\mathsf{R}}) = \overline{T^\pi(\mathsf{R})}$

4. Nach 1. ist T^π invertierbar, also injektiv, daher gilt die Gleichheitsübertragung. Für die Teilmengenbeziehung gilt:
$\mathsf{R} \subset \mathsf{S} \iff \mathsf{R} \cup \mathsf{S} \overset{(RA1),4.}{=} \mathsf{S} \overset{(RA2)}{\iff} T^\pi(\mathsf{R}) \cup T^\pi(\mathsf{S}) = T^\pi(\mathsf{S}) \iff T^\pi(\mathsf{R}) \subset T^\pi(\mathsf{S})$

5. Für jede κ, λ und Relationen R_i, S gilt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{S} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; (\textstyle\bigcup_{i\in I} \mathsf{R}_i) &\overset{2.}{=} ((\textstyle\bigcup_{i\in I} \mathsf{R}_i)^{(\kappa\lambda)} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}^{(\kappa\lambda)})^{(\kappa\lambda)} \\
&\overset{(RA1)}{=} (\textstyle\bigcup_{i\in I} (\mathsf{R}_i^{(\kappa\lambda)}) \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}^{(\kappa\lambda)})^{(\kappa\lambda)} \\
&\overset{(RA8)}{=} \textstyle\bigcup_{i\in I} (\mathsf{R}_i^{(\kappa\lambda)} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}^{(\kappa\lambda)})^{(\kappa\lambda)} \\
&\overset{2.}{=} \textstyle\bigcup_{i\in I} (\mathsf{S} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{R}_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{S} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; (\textstyle\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i) &\overset{2.}{=} ((\textstyle\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i)^{(\kappa\lambda)} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}^{(\kappa\lambda)})^{(\kappa\lambda)} \\
&\overset{(RA1)}{=} (\textstyle\bigcap_{i\in I} (\mathsf{R}_i^{(\kappa\lambda)}) \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}^{(\kappa\lambda)})^{(\kappa\lambda)} \\
&\overset{(RA9)}{\subset} \textstyle\bigcap_{i\in I} (\mathsf{R}_i^{(\kappa\lambda)} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S}^{(\kappa\lambda)})^{(\kappa\lambda)} \\
&\overset{2.}{=} \textstyle\bigcap_{i\in I} (\mathsf{S} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{R}_i)
\end{aligned}$$

Für (RA10')

$$\top \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{R} \overset{(RA6)}{=} \mathsf{R} \;{}_\lambda\diamond_\kappa\; \top = c_\lambda(R)$$

Für die übrigen Sätze funktioniert der Beweis analog.

6. Nach dem Konvertierungssatz 2. gilt:

$$(\mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{S})^{(\kappa\lambda)} = (\mathsf{S} \;{}_\lambda\diamond_\kappa\; \mathsf{R})^{(\kappa\lambda)} = (\mathsf{S}^{(\kappa\lambda)} \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{R}^{(\kappa\lambda)})$$

7.

$$\begin{aligned}
T^\pi(c_\kappa(\mathsf{R})) &\overset{(RA5)}{=} T^\pi(\mathsf{R} \;{}_\kappa\diamond_\kappa\; \mathsf{S}) \\
&\overset{(RA15)}{=} (T^\pi(\mathsf{R})) \;{}_{\pi^{-1}(\kappa)}\diamond_{\pi^{-1}(\kappa)}\; (T^\pi(\mathsf{R}))
\end{aligned}$$

8. $c_\lambda(\mathsf{R}) = T^{(\kappa\lambda)}(c_\kappa(T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R})))$ folgt aus 7. mit $\pi = (\kappa\lambda)$
9. Läßt sich unter Verwendung von (RA8), (RA8') analog zum Nachweis von 4. mittels (RA1) nachweisen.

10. Nach Definition der zylindrischen Algebra gilt $c_\kappa(\emptyset) = \emptyset$. Daraus folgt mit (RA10):

$$\emptyset \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \top = \emptyset \Rightarrow \emptyset \;{}_\kappa\diamond_\lambda\; \mathsf{R} = \emptyset$$

mit 9., weil $\mathsf{R} \subset \top$ für alle R.

11. Unter Verwendung der Semi-Distributivgesetze (RA9), (RA9') und der Identität (RA10') ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{R} \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \mathsf{S} & = & (\mathsf{R} \cap \top) \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; (\mathsf{S} \cap \top) \\ & & \subset\; (\mathsf{R} \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \mathsf{S}) \cap (\mathsf{R} \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \top) \cap (\top \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \mathsf{S}) \cap (\top \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \top) \\ \Longrightarrow & & \mathsf{R} \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \mathsf{S} \subset (\mathsf{R} \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \top) \cap (\top \;{}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\; \mathsf{S}) \overset{(RA10),(RA10')}{=} c_{\kappa}(\mathsf{R}) \cap c_{\lambda}(\mathsf{S}) \end{array}$$

□(Bemerkung 58)

Für $\kappa = \lambda$ (falls zugelassen) ergibt sich fast in allen Fällen eines der Gesetze der zylindrischen Algebren. Für den Fall $k = 2$ ergeben sich die Gesetze der binären Relationenalgebren als Spezialfall. Und zwar folgt dann (bR1) aus (RA7), (bR2) aus (RA8), (bR3) aus (RA12), (bR4) aus (RA3) und (RA4), (bR6) aus (RA6) oder (RA15), und die Folgerungen 1. aus (RA3), 2. aus (RA4), 3. aus (RA1), 4. aus 58.4, 5. aus 58.9, denn bei binären Relationenalgebren existiert nur die triviale Transformationsoperation T^{id}, die Diagonalrelation $\{\mathit{eq}\} = \mathbb{d}_{12} = \mathbb{d}_{21}$ und die Konversion. Dabei wird in binären Relationenalgebren nur die Komposition ${}_{2}\diamond_{1} = \circ$ betrachtet, da ${}_{1}\diamond_{2}$ in (bR6) (oder (RA6)) auf $\circ$ zurückgeführt wird.

In meinem Sinne definierte Relationenalgebren existieren nicht nur als binäre, sondern auch als ternäre und k-stellige Algebren für alle $k \in \mathbb{N}$. In der Tat ist jedes der folgenden semantischen Definition entsprechende Kalkülmodell eine Relationenalgebra:

Definition 59 (transformierte Relation) *:*
Sei π eine Permutation der Positionen einer k-stelligen Relation R, so bezeichne R^{π} die **transformierte Relation** *mit der Eigenschaft*

$$(e_1, \ldots, e_k) \in \mathsf{R} :\Longleftrightarrow \bar{\pi}((e_1, \ldots, e_k)) := (e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(k)}) \in \mathsf{R}^{\pi}$$

$\bar{\pi}((e_1, \ldots, e_k))$ *heißt* **Transformation** *des Tripels* $(e_1, \ldots, e_k)$ *Die Operation T^{π}: $\mathsf{R} \mapsto \mathsf{R}^{\pi}$ heißt Transformationsoperation.*

Satz 60 (Relationenalgebren) *:*
k-stellige Zylindrische Algebren, die die so definierten Transformationsoperationen und steifen Kompositionsoperationen enthalten, sind Relationenalgebren.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) \in T^\pi(\bigcup i \in I\,\mathsf{R}) & \Longleftrightarrow & (e_1,\ldots,e_k) \in (\bigcup_{i\in I}\ R_i) \\
& \Longleftrightarrow & \exists i \in I: \quad (e_1,\ldots,e_k) \in R_i \\
& \Longleftrightarrow & \exists i \in I: \quad \bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) \in T^\pi(\mathsf{R}) \\
& \Longleftrightarrow & \bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) \in (\bigcup_{i\in I}\ (T^\pi(\mathsf{R}))
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) \in T^\pi(\bigcap i \in I\,\mathsf{R}) & \Longleftrightarrow & (e_1,\ldots,e_k) \in (\bigcap_{i\in I}\ R_i) \\
& \Longleftrightarrow & \forall i \in I: \quad (e_1,\ldots,e_k) \in R_i \\
& \Longleftrightarrow & \forall i \in I: \quad \bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) \in T^\pi(\mathsf{R}) \\
& \Longleftrightarrow & \bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) \in (\bigcap_{i\in I}\ (T^\pi(\mathsf{R}))
\end{array}$$

RA2:

$$(e_1,\ldots,e_k) \in \mathsf{R} :\Longleftrightarrow\ \bar{\pi}((e_1,\ldots,e_k)) :=\ (e_{\pi(1)},\ldots,e_{\pi(k)}) \in \mathsf{R}^\pi$$

bedeutet, daß

$$\begin{array}{rcl}
(e_1,\ldots,e_k) \in T^{\pi_1}(T^{\pi_2}(\mathsf{R})) & \Longleftrightarrow & (e_{\pi_1^{-1}(1)},\ldots,e_{\pi_1^{-1}(k)}) \in T^{\pi_2}(\mathsf{R}) \\
& \Longleftrightarrow & (e_{\pi_2^{-1}(\pi_1^{-1}(1))},\ldots,e_{\pi_2^{-1}(\pi_1^{-1}(k))}) \in \mathsf{R} \\
& \Longleftrightarrow & (e_{(\pi_1\circ\pi_2)^{-1}(1)},\ldots,e_{(\pi_1\circ\pi_2)^{-1}(k)} \in \mathsf{R} \\
& \Longleftrightarrow & (e_1,\ldots,e_k) \in T^{(\pi_1\circ\pi_2)}(\mathsf{R}).
\end{array}$$

RA3: $(T^{id}\ =\ id)$ und
RA4: $(T^\pi(\emptyset)\ =\ \emptyset$ und $T^\pi(\top)\ =\ \top)$ sind trivial.

RA5: Eine solche Definition macht Sinn, denn

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{R}_1\ {}_\kappa\diamond_\kappa\ \mathsf{R}_2 & :\Longleftrightarrow & & (p_1,\ldots,p_k) \in c_\kappa(\mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2) \\
& \Longleftrightarrow & \exists q_\kappa: & s_\kappa(q_\kappa)(p_1,\ldots,p_k) \in \mathsf{R} \cap \mathsf{R}_2 \\
& \Longleftrightarrow & \exists q_\kappa: & s_\kappa(q_\kappa)(p_1,\ldots,p_k) \in \mathsf{R}_1 \wedge s_\kappa(q_\kappa)(p_1,\ldots,p_k) \in \mathsf{R}_2
\end{array}$$

entspricht genau der Definition von ${}_\kappa\diamond_\lambda$.

RA6: trivial.

RA7: $\forall\kappa \neq \lambda, \mathsf{R}_i, \mathsf{S}$:

$$\begin{array}{lll}
& & (a,b,c) \in (\mathsf{R}_1\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_2)\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_3 \\
\Longleftrightarrow & \exists d_2: & s_\kappa(d_2)(a,b,c) \in (\mathsf{R}_1\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_2) \wedge s_\lambda(d_2)(a,b,c) \in \mathsf{R}_3 \\
\Longleftrightarrow & \exists d_2 : \exists d_1 : & s_\kappa(d_1)s_\kappa(d_2)(a,b,c) \in \mathsf{R}_1 \\
& & \wedge s_\lambda(d_1)(s_\kappa(d_2)(a,b,c)) \in \mathsf{R}_2 \\
& & \wedge s_\lambda(d_2)(a,b,c) \in \mathsf{R}_3 \\
\overset{\kappa\neq\lambda}{\Longleftrightarrow} & \exists d_1 : \exists d_2 : & s_\kappa(d_1)(a,b,c) \in \mathsf{R}_1 \\
& & \wedge s_\kappa(d_2)(s_\lambda(d_1)(a,b,c)) \in \mathsf{R}_2 \\
& & \wedge s_\lambda(d_2)(s_\lambda(d_1)(a,b,c)) \in \mathsf{R}_3 \\
\Longleftrightarrow & \exists d_1 : & s_\kappa(d_1)(a,b,c) \in \mathsf{R}_1 \wedge s_\lambda(d_1)(a,b,c) \in (\mathsf{R}_2\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_3) \\
\Longleftrightarrow & & (a,b,c) \in \mathsf{R}_1\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ (\mathsf{R}_2\ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_3)
\end{array}$$

RA8: $\forall \kappa, \lambda, \mathsf{R}_i, \mathsf{S}$:

$$\begin{array}{lll}
(a,b,c) & & \in (\bigcup_{i\in I} \mathsf{R}_i)\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} \\
& \iff & \exists d:\ s_\kappa(d)(a,b,c) \in (\bigcup_{i\in I} \mathsf{R}_i)\ \wedge\ s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{S} \\
& \iff & \exists d:\ (\bigvee_{i\in I} (s_\kappa(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_i))\ \wedge\ (s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_2) \\
& \iff & \exists d:\ \bigvee_{i\in I} ((s_\kappa(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_i)\ \wedge\ (s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_2)) \\
& \iff & \bigvee_{i\in I} (\exists d:\ ((s_\kappa(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_i)\ \wedge\ (s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_2))) \\
& \iff & (a,b,c) \in \bigcup_{i\in I} (\mathsf{R}_i\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S})
\end{array}$$

RA9: $\forall \kappa, \lambda, \mathsf{R}_i, \mathsf{S}$:

$$\begin{array}{lll}
(a,b,c) & & \in (\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i)\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S} \\
& \iff & \exists d:\ s_\kappa(d)(a,b,c) \in (\bigcap_{i\in I} \mathsf{R}_i)\ \wedge\ s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{S} \\
& \iff & \exists d:\ (\bigwedge_{i\in I} (s_\kappa(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_i))\ \wedge\ (s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_2) \\
& \iff & \exists d:\ \bigwedge_{i\in I} ((s_\kappa(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_i)\ \wedge\ (s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_2)) \\
& \implies & \bigwedge_{i\in I} (\exists d:\ ((s_\kappa(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_i)\ \wedge\ (s_\lambda(d)(a,b,c) \in \mathsf{R}_2))) \\
& \iff & (a,b,c) \in \bigcap_{i\in I} (\mathsf{R}_i\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S})
\end{array}$$

RA10. RA11, ergeben sich direkt aus der Definition von ${}_{\kappa}\diamond_{\lambda}$.
RA12:

$$p_1,\dots,p_k \in \mathsf{R} \iff \exists d = p_\kappa : s_\kappa(d)(p_1,\dots,p_k) \in \mathsf{R} \wedge s_\lambda(d)(p_1,\dots,p_k) \in \mathsf{d}_{\kappa\lambda}$$

RA13: $\forall p_1,\dots,p_k$:

$$\exists d = p_\lambda :\ s_\kappa(d)(p_1,\dots,p_k) \in \mathsf{d}_{\kappa\lambda}\ \wedge\ s_\mu(d)(p_1,\dots,p_k) \in \mathsf{d}_{\lambda\mu}$$

RA14: $\forall p_1,\dots,p_k \in \mathsf{R}$:

$$s_\kappa(p_\kappa)(p_1,\dots,p_k) \in \mathsf{R} \wedge s_\kappa(p_\lambda)(s_\lambda(p_\kappa)(p_1,\dots,p_k) \in T^{(\kappa\lambda)}(\mathsf{R}) \wedge s_\lambda(p_\lambda)(p_1,\dots,p_k) \in \mathsf{R}$$

RA15:

$$\begin{array}{ll}
& (e_1,e_2,e_3) \in T^\pi(\mathsf{R}\ {}_{\kappa_2}\diamond_{\lambda_2}\ \mathsf{S}) \\
\iff & (e_{\pi^{-1}(1)},\dots,e_{\pi^{-1}(3)}) \in (\mathsf{R}\ {}_{\kappa_2}\diamond_{\lambda_2}\ \mathsf{S}) \\
\iff & \exists\, d : (s_{\kappa_2}(d))(e_{\pi^{-1}(1)},\dots,e_{\pi^{-1}(3)}) \in \mathsf{R} \text{ und } (s_{\lambda_2}(d))(e_{\pi^{-1}(1)},\dots,e_{\pi^{-1}(3)}) \in \mathsf{S} \\
\iff & \exists\, d : (s_{\pi^{-1}(\kappa_2)}(d))(e_1,\dots,e_3) \in \mathsf{R}^\pi \text{ und } (s_{\pi^{-1}(\lambda_2)}(d))(e_1,\dots,e_3) \in \mathsf{S}^\pi \\
\iff & \exists\, d : (s_{\kappa_1}(d))(e_1,\dots,e_3) \in \mathsf{R}^\pi \text{ und } (s_{\lambda_1}(d))(e_1,\dots,e_3) \in \mathsf{S}^\pi \\
\iff & (e_1,\dots,e_3) \in (\mathsf{R}^\pi\ {}_{\kappa_1}\diamond_{\lambda_1}\ \mathsf{S}^\pi)
\end{array}$$

$\Box$(Satz 60)

Das zu einer Relationenalgebra gehörende Kalkül besitzt als Relationen die Grundmenge der Relationenalgebra, und als Schlußregeln alle der Semantik folgenden Ersetzungen von Relationen durch ihre Transformationen und Kompositionen und Schnitte. Aufgrund der Semantik kann so die Syntax des zugehörigen Kalküls bestimmt werden. Die Eigenschaften der Relationenalgebra helfen dabei, Rechenzeit zu sparen, wie aus dem Konvertierungssatz (Bemerkung 58.2.) folgt:

Korollar 61 (Abhängigkeit der Kompositionen voneinander) *:*
1. Eine Komposition legt in einer Relationenalgebra zusammen mit den Transformationsoperationen alle übrigen Kompositionen fest. 2. Wenn in einem Kalkül $\mathfrak{K}$ alle Permutationen vollständig sind und eine Komposition vollständigist, dann sind alle Kompositionen vollständig, d. h. $\mathfrak{K}$ ist kompositions- und permutationsvollständig.

Die Berechnung der Kompositionstabelle in einer Relationenalgebra ist wesentlich aufwendiger als die Bestimmung der Transformationsoperationen. Aus dem Korollar 61 folgt als praktische Konsequenz, daß man Rechenaufwand sparen kann, indem man eine Kompositionstabelle auf der Basis der Semantik bestimmt, und die übrigen mit Hilfe weniger Operationen ausliest.

Anmerkung:
Die Bedingung für das Assoziativgesetz (RA7), daß κ und λ in den Kompositionen gleich sind, ist wesentlich. Denn beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} (\{\mathit{rp}\}\ {}_3\diamond_2\ \{\mathit{sf}\})\ {}_2\diamond_1\ \{\mathit{lp}\} &= \{\mathit{rf}\}\ {}_2\diamond_1\ \{\mathit{lp}\} = \{\mathit{lf}\} \\ \text{aber } \{\mathit{rp}\}\ {}_3\diamond_2\ (\{\mathit{sf}\}\ {}_2\diamond_1\ \{\mathit{lp}\}) &= \{\mathit{rp}\}\ {}_3\diamond_2\ \{\mathit{lf}\} = \{\mathit{rf}, \mathit{sf}, \mathit{lf}\}. \end{aligned}$$

(vgl. Kompositionstabelle im Anhang)

3.5 Topologische Eigenschaften

Um weitere Möglichkeiten zur Zeitersparnis bei der Erstllung von Kalkülen vorstellen zu können, verallgemeinere ich nun das Konzept der konzeptionellen Nachbarschaft von C. Freksa [Fre92].

Definition 62 (Konzeptuelle Nachbarschaft) *:*
zwei Relationen R *und* S *in einem Kalkülmodell über einem topologischen Raum heßen* ***konzeptionell benachbart*** *, falls es zu jedem Tupel t_R in* R *und t_S in* S *einen stetigen Weg v von t_R nach t_S gibt, der beide verbindet mit der Zusatzeigenschaft, daß für jedes Tupel $t \in v$ gilt:*

$$t \in \mathsf{R} \textit{ oder } t \in \mathsf{S}.$$

Diese Nachbarschaftsbeziehung wird außerdem eingeführt, weil sich mit ihr wegen der Stetigkeit von Permutation, Komposition und Schnitt aus gezogenen Folgerungen weitere Schlüsse ziehen lassen und weil sie ein Konzept modelliert, das auch in unserem Denken stark verwurzelt ist. Wenn ein Ergebnis möglich ist, halten wir räumlich nur geringfügig unterschiedliche Alternativen

fürs wahrscheinlicher als weit entfernte, mit anderen Worten, Fehler werden als "stetig" begriffen.
Da man mit den Relationen subjektive Klassifikationsstrukturen automatisieren will, deren Ergebnisse leicht wieder in die Alltagssprache übertragen werden können, wird man im allgemeinen Tupel zu Basisrelationen zusammenfassen, die in einem gewissen Sinn nahe beieinander liegen. Eine diesbezüglich schwache Forderung ist die Bedingung, daß eine Relationen zusammenhängend ist, das heißt, daß R nicht in zwei relativ zu R offene disjunkte Teilmengen zerfallen kann. Dies gilt, wenn man je zwei Elemente der gleichen Relation miteinander in dieser Relation verbinden kann [Rem92a]:

Definition 63 (wegzusammenhängende Relationen) *: Eine Relation heißt* ***wegzusammenhängend*** *, wenn es zu je zwei Elementen, die sie erfüllen, einen stetigen Weg in der Relation selbst gibt, der sie verbindet.*

Wegzusammenhängende Relationen sind offenbar genau die Relationen, die konzeptionell benachbart zu sich selbst sind.

Bemerkung 64 (Wegzusammenhang in Relationenalgebren) *:*
Wenn das Universum wegzusammenhängend ist, bleibt in jeder Relationenalgebra die konzeptionelle Nachbarschaft unter Zylindrifikationen erhalten und die Schnitte von Diagonalrelationen sind wegzusammenhängend.

Beweis:
Die erste Teilaussage ist trivial, da dann jede Zylindrifikation wegzusammenhängend ist. Bei zwei gegebenen Realisierungen zuerst für alle durch Gleichheitsbedingungen aneinander gekoppelten Koordinaten der Wert simultan vom Wert der einen Relation in den Wert der anderen Relation überführt werden, und dann jede der restlichen Koordinaten. Sei beispielsweise $\mathsf{d}_{12} \cap \mathsf{d}_{24}$ durch $t_0 = (a_0, a_0, b_0, a_0)$ und $t_1 = (a_1, a_1, b_1, a_1)$ realisiert, so gibt es stetige Wege $v, w : [0,1] \to U^4$ mit $v(0) = a_0$ und $v(1) = a_1$, und $w(0) = b_0$ und $w(1) = b_1$. Dann ist die Verbindung von $\{(v(t), v(t), b_0, v(t)) \mid t \in [0,1]\}$ und $\{(a_1, a_1, w(t), a_1) \mid t \in [0,1]\}$ ein stetiger Weg von p_0 nach p_1.

□(Anmerkung)

Definition 65 (trennende Relation) *:*
Zu zwei Relationen R und S in einem Kalkülmodell, die nicht konzeptionell benachbart sind, heißt die maximale Relation $\mathsf{T} \in \mathfrak{K}$, die zu beiden Relationen konzeptionell benachbart ist, die sie ***trennende Relation*** *.*

Beispiel 13 (Konzeptuelle Nachbarschaft von $\mathfrak{SC}$ und $\mathfrak{DC}$) *:*
1. Alle Relationen des Einzelkreuzkalküls und alle Relationen des Doppelkreuzkalküls sind wegzusammenhängend.
2. In $\mathfrak{SC}$ sind die Basisrelationen $\{n\}$ und $\{m\}$ konzeptionell benachbart, genau dann, wenn

$$n - m \; = \; \pm 1 \mod 8.$$

Die konzeptionelle Nachbarschaft von $\mathfrak{DC}$ ist in Tabelle 3.1 zusammengefaßt (reduziert ohne Informationsverlust aufgrund der Rechts- Links-Symmetrie). Dabei bedeutet "k.b." daß die beiden Relationen konzeptionell benachbart sind, andernfalls ist die Menge der trennenden Relation in $\mathfrak{DC}$ angegeben [1].

	$\{lf\}$	$\{lp\}$	$\{lc\}$	$\{ll\}$	$\{lb\}$	$\{sf\}$	$\{e_{23}\}$	$\{sc\}$	$\{e_{13}\}$	$\{sb\}$
$\{lf\}$	=	k.b.	$\{lp\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	k.b.	k.b.	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{lp\}$	k.b.	=	k.b.	$\{lc\}$	$\emptyset$	$\{lf, e_{23}\}$	k.b.	$\{lc, e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{lc\}$	$\{lp\}$	k.b.	=	k.b.	$\{ll\}$	$\{e_{23}\}$	k.b.	k.b.	k. b.	$\{e_{13}\}$
$\{ll\}$	$\emptyset$	$\{lc\}$	k.b.	=	k.b.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{lc, e_{13}\}$	k.b.	$\{lb, e_{13}\}$
$\{lb\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{ll\}$	k.b.	=	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{13}\}$	k.b.	k.b.
$\{sf\}$	k.b.	$\{lf, e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	=	k.b.	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{e_{23}\}$	k.b.	k.b.	k.b.	$\{lc\}$	$\emptyset$	k.b.	=	k.b.	$\{sc\}$	$\emptyset$
$\{sc\}$	$\{e_{23}\}$	$\{lc, e_{23}\}$	k.b.	$\{lc, e_{13}\}$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{23}\}$	k.b.	=	k.b.	$\{e_{13}\}$
$\{e_{13}\}$	$\emptyset$	$\{lc\}$	k.b.	k.b.	k.b.	$\emptyset$	$\{sc\}$	k.b.	=	k.b.
$\{sb\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{13}\}$	$\{lb, e_{13}\}$	k.b.	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{13}\}$	k.b.	=
$\{rf\}$	$\{sf\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	k.b.	k.b.	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{rp\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{rf, e_{23}\}$	k. b.	$\{rc, e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{rc\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{23}\}$	k.b.	k.b.	k.b.	$\{e_{13}\}$
$\{rl\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{13}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{rc, e_{13}\}$	k.b.	$\{rb, e_{13}\}$
$\{rb\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{13}\}$	$\{e_{13}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e_{13}\}$	k.b.	k.b

Tabelle 3.1: Konzeptuelle Nachbarschaften von $\mathfrak{DC}$. „ = “: gleiche Relation, trivial konzeptionell benachbart. „k.b.“ = konzeptionell benachbart. „$\emptyset$“: keine gemeinsamen konzeptionelle Nachbarn angegebene Relationen: gemeinsame konzeptionelle Nachbarn = trennende Relation.

Beweis:
Daß die Relationen alle wegzusammenhängend sind und daß die angegebenen konzeptionellen Nachbarschaften gelten, läßt sich leicht nachprüfen, am einfachsten mit dem nachfolgenden Kriterium. Daher bleibt für $\mathfrak{SC}$ noch zu zeigen, daß Relationen $\{m\}$ und $\{n\}$ nicht konzeptionell benachbart sein können, wenn sie sich um mindestens 2 unterscheiden. Dies liegt offenbar daran, daß die zu einem Punkt des stetigen Weges gehörenden Winkel bei b stetig von dem Tripel abhängen und daher entlang jedes stetigen Weges eine stetige Transformation des Winkels beim Referenzpunkt b^θ entspricht. Da zwischen je

[1] Beachte, daß $\{eq\}$ nicht in $\mathfrak{DC}$ enthalten ist

zwei Winkeln aus $\{m\}$ und $\{n\}$ ein Winkel liegt, der nicht einer der Relationen $\{m,n\}$ entspricht, muss jeder stetige Weg von einem Tripel in $\{m\}$ zu einem Tripel in $\{n\}$ über ein Tripel $\notin \{m,n\}$ führen (also Tripel einer anderen Relation oder ausgeartete Tripel, bei denen Referenz- und Zielpunkt zusammenfallen).
Die Eigenschaft, nicht konzeptionelle Nachbarn zu sein, vererbt sich von $\mathfrak{SC}$ auf $\mathfrak{DC}$, weil die Relationen von $\mathfrak{DC}$ Teilmengen der Relationen von $\mathfrak{SC}$ sind, oder aber der Transformationen von $\mathfrak{SC}$.

$\square$(Beispiel 13)

Bemerkung 66 (Kriterium für konzeptionelle Nachbarschaft) *:*
Wenn zwei Relationen wegzusammenhängend und disjunkt sind, sind sie konzeptionell benachbart, genau dann, wenn eine Relation einen Randpunkt der anderen enthält.

Beweis:
<u>konzeptionelle Nachbarschaft $\Rightarrow$ Randpunkt-Eigenschaft:</u>
Falls es zu je einem Punkt p_R in R und p_S in S einen stetigen Weg gibt, der ganz in $\mathsf{R}\cup\mathsf{S}$ liegt, so zerfällt dieser in zwei nach Voraussetzung disjunkte Teilmengen, nämlich die der Tupel in R und der Tupel in S. Weil der stetige Weg wegzusammenhängend ist, sind nicht beide offen, also enthält eine Teilmenge einen Randpunkt, der auch Randpunkt des Komplements in w ist und daher Randpunkt der anderen Relation.

<u>Randpunkt-Eigenschaft $\Rightarrow$ konzeptionelle Nachbarschaft:</u>
Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit p Randpunkt von R und p in S. Weil R wegzusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg zu jedem Punkt von R, dessen Punkte möglicherweise ausser p selbst alle in R liegen, und weil S wegzusammenhängend ist, gibt es einen entsprechenden Weg von p zu jedem Punkt in S, der ganz in S verläuft. Die Zusammensetzung aus beiden ist der gesuchte Weg.

$\square$(Bemerkung 66)

Wie wir spater sehen werden, hilft dieses Konzept der konzeptionellen Nachbarschaft bei der Erstellung von Kompositionstabellen, weil die konzeptionelle Nachbarschaft bei Kompositionen und Permutationen erhalten bleibt. Permutationen trennender wegzusammenhängender Relationen sind daher auch trennende Relationen ihrer Permutationen. Diese Operationen des Kalküls müssen dann nur noch für eine Teilmenge T bestimmt werden, sodaß jede Relation in

T vorkommt oder Schnitt von Relationen ist, die T trennen.

Ich will nun im folgenden diese Erkenntnisse für die Vorstellung einiger Kalküle nutzen, die auf Relationenalgebren basieren und deren Relationen wegzusammenhängend sind. Dabei beschränke ich mich auf eine Klasse von Kalkülen, der fast alle gängigen Kalküle des rst-Konzepts angehören (vgl. Einleitung, Abschnitt 1.3).

Kapitel 4

RST-Relationenalgebren

Wir kommen nun zum Kern dieser Arbeit. Vor allem die Aussagen aus den Kapiteln 5 und 6 beruhen auf den in diesem Kapitel vorgestellten arithmetischen Ergebnissen, vor allem auf dem Eichkorollar 71, dem Transformationssatz (Satz 78) und dem Kompositionssatz (Satz 81).

4.1 Grundlegendes über RST-Relationenalgebren

Ich will von nun an meine Untersuchungen auf ternäre RST-Kalküle im Standardmodell $\mathbb{R}^2$ einschränken. Jedes Kalkülmodell $\mathfrak{K}$ kann man in eine Relationenalgebra $\mathfrak{K}^{RA}$ einbetten, indem man es unter Menge der in Relationenalgebren definierten Operatoren gemäß Satz 48 abschließt. Für ternäre Kalküle bedeutet das, daß man die Relationen $\mathfrak{d}_{12}, \mathfrak{d}_{13}, \mathfrak{d}_{21}, \mathfrak{d}_{23}, \mathfrak{d}_{31}, \mathfrak{d}_{32}, \{eq\}$ und $\top = \mathfrak{d}_{11} = \mathfrak{d}_{33}$ einfügt, den JEPD-Abschluß bildet und es vervollständigt. Dadurch sind die Operationen $\cup, \cap, \bar{}$ definiert. Die Zylindrifikationen, Transformationsoperationen und Kompositionsoperationen können gemäß der Semantik aus Definitionen 53, 56und Definition 59im vorigen Kapitel definiert werden, also:

$$
\begin{array}{lll}
(p_1, p_2, p_3) \in c_\kappa(\mathsf{R}) & :\Longleftrightarrow & \exists q:\ s_\kappa(q)(p_1, p_2, p_3) \\
\text{Komposition:} & & \\
(a, b, c) \in \mathsf{R}_1 \ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_2 & :\Longleftrightarrow & \exists\, d : (s_\kappa(d))(a, b, c) \in \mathsf{R}_1 \text{ und } (s_\lambda(d))(a, b, c) \in \mathsf{R}_2 \\
\text{Transformation:} & & \\
(e_1, e_2, e_3) \in \mathsf{R} & :\Longleftrightarrow & (e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, e_{\pi(3)}) \in \mathsf{R}^\pi
\end{array}
$$

In allen folgenden vorgestellten Kalkülen sei dies die Semantik der Operationen. Unter dieser Konvention ist jedes von ihnen durch die Angabe der

Semantik seiner Relationen definiert, weil sich so die Operationen direkt durch diese bestimmen lassen. Die im Text angegebenen Permutationstabellen (für Transformationsoperationen) und die Tabellen im Anhang wurden von mir[1] auf dieser Semantik basierend berechnet. Die Kalküle seien nun Relationenalgebren. **Anmerkung:**
$\mathfrak{E}q = \mathfrak{E}q^{RA} = \emptyset^{RA}$ ist die minimale ternäre Relationenalgebra, denn $\emptyset^{RA}$ enthält per Definition die Relationen $\{\mathsf{eq}\} = \mathsf{d}_{12} \cap \mathsf{d}_{23}$, $\{\mathsf{e}_\kappa\lambda\} = \mathsf{d}_{\kappa\lambda} \cap \overline{\mathsf{d}_{\kappa\mu}} (\kappa \neq \mu \neq \lambda)$, und $\{\mathsf{neq}\} = \overline{\mathsf{d}_{12}} \cap \overline{\mathsf{d}_{23}}$, sowie deren Vereinigungen. Wie aus den Beispielen in Anschnitt 3.1 und den Eigenschaften der Relationenalgebren (Definition 57) folgt, ist $\mathfrak{E}q$ unter allen Relationenalgebra-Operationen abgeschlossen, also gilt sogar $\mathfrak{E}q^{RA} = \mathfrak{E}q$. [2]

Bemerkung 67 (RST-Relationenalgebren) *:*
Ist $\mathfrak{K}$ ein ternärer[3] RST-Kalkül, so auch $\mathfrak{K}^{RA}$.

Beweis:
Da alle hinzugefügten Relationen RST-Relationen sind, ist zu zeigen, daß die Operationen RST-Relationen auf RST-Relationen abbilden. Sei α eine RST-Abbildung, also Komposition von Rotationen, Streckungen und Translationen, außerdem R_i RST-Relation. Dann gilt

$$\mathsf{R}_i\ (a^\theta, b^\theta : c^\theta) \iff \mathsf{R}_i\ (\alpha(a^\theta), \alpha(b^\theta) : \alpha(c^\theta))$$

Diese Eigenschaft überträgt sich wegen der Bijektivität auf Schnitt, Komposition und Komplement. Und für die Zylindrifikationen gilt dann:

$$(p_1, p_2, p_3) \in c_\kappa(\mathsf{R}) \iff (p_1, p_2, p_3) \in \bigcup_{q_\kappa \in \mathbb{R}^2} Rel(\,(s_\kappa(q_\kappa))\,(p_1, p_2, p_3)\,)$$

$$\overset{\alpha \text{ ist bijektiv}}{\iff} (\alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_3)) \in \bigcup_{q_\kappa \in \mathbb{R}^2} Rel(\, s_\kappa(\alpha(q_\kappa))(\alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_3))\,)$$

$$\iff (\alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(p_3)) \in c_\kappa(\alpha(p_1), \ldots \alpha(p_3)))$$

Für alle Transformationsoperationen π gilt:

$$\begin{aligned} (e_{\pi(1)}, \ldots, .e_{\pi(3)}) \in \mathsf{R}^\pi &\iff (e_1, e_2, e_3) &&\in \mathsf{R} \\ &\iff (\alpha(e_1), \alpha(e_2), \alpha(e_3)) &&\in \mathsf{R} \\ &\iff (\alpha(e_{\pi(1)}), \alpha(e_{\pi(2)}), \alpha(e_{\pi(3)})) &&\in \mathsf{R}^\pi \end{aligned}$$

[1]und meinem Computer

[2]Entsprechend kann man den k-stelligen Gleichheitskalkül als die minimale k-stellige Relationenalgebra definieren.

[3]Der Satz gilt auch für beliebige Stelligkeit k und ist dann ganz analog zu beweisen, ich benötige ihn jedoch speziell für k=3.

Für die Komposition $_3\diamond_2$ (und damit nach Konvertierungssatz 58.2. für alle) gilt:

$$\begin{array}{llll} & & \mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2 \ \ (a^\theta, b^\theta : c^\theta) & \\ \Longleftrightarrow & \exists\, d^\theta : & \mathsf{R}_1 \ (a^\theta, b^\theta : d^\theta) & \text{und} \ \ \mathsf{R}_2 \ (a^\theta, d^\theta : c^\theta) \\ \Longleftrightarrow & \exists\, \alpha(d^\theta) : & \mathsf{R}_1 \ (\alpha(a^\theta), \alpha(b^\theta) : \alpha(d^\theta)) & \text{und} \ \ \mathsf{R}_2 \ (\alpha(a^\theta), \alpha(d^\theta) : \alpha(c^\theta)) \\ \Longleftrightarrow & & (\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2) \ (\alpha(a^\theta), \alpha(b^\theta) : \alpha(c^\theta)) & \end{array}$$

□(Bemerkung 67)

Meine Arbeit handelt von den Relationenalgebren, die dem Prinzip des relative spatial treatment folgen (vgl. 1.3) Die Kalküle $\mathfrak{SC}$ und $\mathfrak{DC}$ sind für solche Kalküle, die eine durch eine rst-Beschreibung (relative spatial treatment) ihrer Relationen charakterisiert sind. Für die Beschreibung der Relationen kommt es nur auf die relative Richtung und den relativen Abstand des dritten Punktes zu zwei gegebenen Punkten an, nicht auf die absolute Lage. Die Ähnlichkeit der Bezeichnungen rst und RST ist kein Zufall: Denn dies sind genau die Eigenschaften, welche die von mir als RST-Relationenalgebren bezeichneten Kalküle auszeichnen. Denn bei Drehung, Verschiebung und zentrischer Streckung (Maßstabsänderung) ändert sich die relative Lage (Winkel und Abstandsverhältnisse) nicht.
Die Abbildungen 2.1 und 2.8 zeigen, daß zu festen Punkten a, b als Start- bzw. Referenzpunkt verschiedene Relationen von $\mathfrak{SC}$ beziehungsweise $\mathfrak{DC}$ erfüllt werden, je nachdem wo der dritte Punkt in Bezug zu ihnen liegt. Bis auf $\{\mathit{eq}\}$ und $\{\mathit{e}_{12}\}$ entspricht in diesen Abbildungen jede Relation von $\mathfrak{SC}$ beziehungsweise $\mathfrak{DC}$ einer Region der Ebene, die als Lage des dritten Punktes zu den (als gegeben gedachten) Start- und Referenzpunkten in Frage kommt, um diese Relation zu erfüllen. Dies legt nahe, ein solches Schema zu verallgemeinern und als Grundlage für die Definition der Relationen in beliebigen RST-Relationenalgebren, also beliebiger RST-Relationen, zu nutzen, indem man eine standardmäßig vorgegebene Referenzstrecke auswählt, und die Relationen als deren Erweiterungen auffaßt.

Satz 68 (Eichbarkeit) *:*
*Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Abbildungen. Dann existiert für die Klasse $\mathbf{G}^k$ der unter $\mathcal{G}$ invarianten k-stelligen Relationen eine Abbildung (**Eichung**) $\eta : U^k \to U^k$, so daß $\eta(e_1, \ldots, e_k) = \eta(e'_1, \ldots, e'_k)$ genau dann, wenn für jede Relation R $\in \mathbf{G}^k$ gilt:*

$$\eta(e_1, \ldots, e_k) \in \mathsf{R} \iff \eta(e'_1, \ldots, e'_k) \in \mathsf{R}$$

Speziell für die Gruppe der ternären RST-Abbildungen existiert daher eine Eichung $\eta : U^3 \to U^3$, so daß $\eta((a, b, c)) = \eta((a', b', c'))$ genau dann, wenn für jede RST-Relation R gilt:

$$\mathsf{R} \ (a, b : c) \Leftrightarrow \ \mathsf{R} \ (a', b' : c')$$

Beweis:
Die Beziehung zwischen zwei Tripeln $t_1, t_2 \in U^k$, auseinander durch Operationen aus $\mathcal{G}$ hervorzugehen, ist eine Äquivalenzrelation. Daher zerfallen die Tripel in entsprechende Äquivalenzklassen. Die Relationen in $\mathbf{G}^k$ (speziell: die RST-Relationen) sind genau die Vereinigungen solcher Äquivalenzklassen, denn wegen der Invarianz liegen äquivalente Tripel in der gleichen Relation.
Ordnet man jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten zu, dann ist die Abbildung $\eta : U^k \to U^k$, die jedem Tripel den Repräsentanten seiner Äquivalenzklasse zuordnet, so eine Eichung. Denn sei R die Äquivalenzklasse von $(e_1, \ldots, e_k)$. Wenn $\eta(e_1, \ldots, e_k) \neq \eta(e'_1, \ldots, e'_k)$, dann $\eta(e'_1, \ldots, e'_k) \notin \mathsf{R}$. Wenn aber $\eta(e_1, \ldots, e_k) = \eta(e'_1, \ldots, e'_k)$, dann sind beide Tripel äquivalent und damit in genau den gleichen Relationen, nämlich allen Oberrelationen von R.

$\square$(Satz 68)

Für die ternären RST-Relationen bedeutet dies also, daß jedes Tripel (a, b, c) aus dem Bild der Eichung alle aus ihm durch Rotation, Drehung und Translation hervorgehenden Tripel repräsentiert. Alle Tripel mit gleichem Bild bilden zusammen eine Äquivalenzklasse. Diese Äquivalenzklassen sind die Atome der feinsten RST-Relationenalgebra, $\mathfrak{F}$, die alle RST-Relationen enthält. Mein Ziel ist nun, ein Standardverfahren anzugeben, das jeder Äquivalenzklasse seinen Standardrepräsentanten zuordnet, um RST-Relationen in einfacher Weise als Vereinigung der entsprechenden Äquivalenzklassen beschreiben zu können. Jede RST-Relationenalgebra läßt sich so auch als Vergröberung der feinsten RST-Relationenalgebra $\mathfrak{F}$ auffassen.
Jedes Tripel ist genau in den RST-Relationen enthalten, die seinen Repräsentanten enthalten. Ein Computer kann so durch Berechnung seiner Eichung feststellen, in welchen Relationen ein Tripel enthalten ist. Da Rotation, Translation und Streckung Ähnlichkeitsabbildungen sind, bedeutet die Invarianz unter RST-Abbildungen, daß wenn $\Delta(a, b, c)$ und $\Delta(a', b', c')$ ähnliche Dreiecke bilden, dann sind die zugehörigen Tripel äquivalent und die Relationen $Rel(a, b : c)$ und $Rel(a', b' : c')$ gleich. Da es zu jedem nicht ausgearteten Dreieck genau ein ähnliches gibt, in dem die Seitenlänge (a, b) gerade 1 beträgt und man dieses so drehen und verschieben kann, daß es in eine beliebige Lage kommt,ist es möglich, Relationen etwa auf das Tripel mit der Strecke $a^\theta b^\theta = ((0; 0)(0; 1))$ als Referenzstrecke zu eichen. Auf dieser Idee basiert die folgende mathematische Wahl der Eichung:

Falls $a = b = c$, so geht $\eta((a, b, c)) := ((0; 0), (0; 0), (0; 0))$ offenbar durch Verschiebung aus (a, b, c) hervor.
Falls $a = b \neq c$, so $\eta((a, b, c)) := ((0; 0), (0; 0), (1; 0))$. Diese Abbildung ist die Verkettung der Translation $\tau : a \mapsto (0; 0)$, der Rotation ρ mit Zentrum $(0; 0)$so daß $\rho : (\tau(c) \mapsto (\,|\tau(c)|\,; 0)$. und der Streckung mit Zentrum $(0; 0)$ und Streckfaktor $\frac{1}{|\tau(c)|}$.
Sonst, also falls $a \neq b$, wähle als η die Verkettung der Translation $\tau : a \mapsto (0; 0)$, der Drehstreckung ρ mit Zentrum $(0; 0)$, sodaß $\rho : (\tau(b) \mapsto (1; 0))$ analog zum vorigen Fall.
Diese Abbildungen sind wohldefiniert, denn zu je zwei Punkten existiert genau eine Verschiebung von einem auf den anderen und nach Voraussetzung ist $a \neq x$ für $x = c$ bzw. $x = b$), und daher $|\tau(x)| \neq 0$.
In einem $\mathbb{R}^2$-Modell einer ternären Relationenalgebra eicht die Abbildung $\sigma \circ \rho \circ \tau$ dann jede Relation auf die Menge der mit ihr konsistenten Erweiterungen von $a = (0; 0)$ und $b = (1; 0)$.
So entspricht jede Relation bei jeder konsistenten Instantiation von Startpunkt a^θ und Referenzpunkt b^θ einer Region (Menge von Punkten), die als Realisation für den dritten Punkt in Frage kommen, also als Menge der $p \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathsf{R}\ (a^\theta, b^\theta : p)$, und kann durch sie definiert werden.
Ein Atom A von $\mathfrak{F}$ ist entweder gleich e_{12} oder eq oder besteht nur aus Tupeln, bei denen Start- und Referenzpunkt verschieden sind. Denn die Gleichheit von Punkten bleibt bei Rotation, Translation und Streckung erhalten. Da jede Relationenalgebra die Relation d_{12} enthält, gilt selbiges für jede Basisrelation einer JEPD-Vergröberung von $\mathfrak{F}$. Eine solche RST-Relation kann daher mit der Region der zu $a^\theta = (0; 0)$, $b^\theta = (0; 1)$ in Frage kommenden dritten Punkte identifiziert werden:

Definition 69 (Repräsentierbarkeit, RST-Relationen als Regionen) *:*
Sei $\mathsf{R} \subset (\top \setminus \mathsf{d}_{12})$ *eine RST-Relation. Dann sei*

$$Reg_{\mathbb{R}}(\mathsf{R}) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \ \mathsf{R}\ ((0; 0), (1; 0) : p)\}$$

die **Region** *von* R*. Der Punkt* p *heißt dann in der Relation* R *enthalten.* R *heiße dann* ***repräsentierbar*** *und durch die* ***Region*** $Reg_{\mathbb{R}}(\mathsf{R})$ *(reell)* ***repräsentiert*** *.*
Oft wird es sinnvoll sein, die Punkte p *nicht als reelle Punkte im* $\mathbb{R}^2$ *zu verstehen, sondern als komplexe Zahlen* z*. Die Menge* $Reg\mathsf{R} := \{x + \imath y \mid (x; y) \in Reg_{\mathbb{R}}(\mathsf{R})\}$ *heißt (komplexe) Repräsentation von* R*, und auch* $z = x + \imath y$ *heiße in der Relation* R ***enthalten*** *.*
Ist $\{\mathsf{e}_{12}\} \subset \mathsf{R}$*, und sei* $\mathsf{R} \setminus \{\mathsf{e}_{12}\}$ *durch* R' *repräsentiert, so heiße* $Reg(\mathsf{R}) := R' \cup \{\infty\}$ *die* ***(punktierte) Repräsentation*** *von* R*, und* R *punktiert repräsentierbar.*

Definition 70 (Punktrelationen) *:*
$\{\mathsf{e}_{12}\}$ *und jede repräsentierbare RST-Relation, die durch eine einpunktige*

Menge (eine einzelne komplexe Zahl) repräsentiert wird, heißt ***Punktrelation*** *. Die Gleichheitsrelation* eq *ist keine Punktrelation, da sie nicht punktiert repräsentierbar ist.*

Beispiel 14 (Midpoint, e_{13} und e_{23}) *:*
Die RST-Relationen $\{\mathsf{e}_{12}\} = \{\infty\}$, $\{\mathsf{e}_{13}\} = \{0\}$, $\{\mathsf{e}_{23}\} = \{1\}$ *und* $\mathsf{Midpoint} := \{\frac{1}{2}\}$ *sind Punktrelationen.*

Der folgende Satz zeigt, daß die Diagonalrelationen in RST-Relationenalgebren nicht weiter unterschieden werden können als in $\{\mathsf{eq}\}$ und $\mathsf{d}_{\kappa\lambda} \setminus \{\mathsf{eq}\}$.

Korollar 71 (Eichkorollar) *:*
1. Jeder Punktmenge entspricht eine repräsentierbare RST-Relation und zwei repräsentierbare Relationen sind genau dann gleich, wenn sie in diesem Sinn genau die gleichen Punkte p enthalten.
2. Es gibt $2^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$ *viele RST-Relationen.*
3. Es gibt nur drei nichtleere RST-Teilrelationen der Diagonalrelationen $\{\mathsf{d}_{\kappa\lambda}\}$, *nämlich* $\{\mathsf{eq}\}$, $\{\mathsf{e}_{\kappa\lambda}\}$ *und* $\{\mathsf{d}_{\kappa\lambda}\}$ *selbst.*

Beweis:
1. folgt sofort aus dem Eichungssatz, weil die Repräsentation die angegebene Eichung verwendet. Jede Relation R ist dann genau die Vereinigung der Äquivalenzklassen der Tripel $((0;0),(1;0),p)$ mit $p \in Reg(\mathsf{R})$.
2. Es gibt $2^{|\mathbb{R}|}$ viele verschiedene Teilmengen der Ebene, also $2^{|\mathbb{R}|}$ viele repräsentierbare Relationen. Andererseits gibt es maximal $2^{|\mathbb{R}|}$ viele (RST-) Relationen, denn es gibt nur $2^{|\mathbb{R}|}$ viele Teilmengen von $U^3 = (\mathbb{R}^2)^3$.
3. Nach dem Eichungssatz entspricht jede RST-Relation einer Teilmenge von $\{((0;0),(0;0),(0;0)),\ ((0;0),(0;0),(1;0))\} \cup \{((0;0),(1;0),p) \mid p \in \mathbb{R}^2\}$. Da Punktegleichheit bei der Eichung erhalten bleibt, gibt es als nichttriviale Teilrelationen von d_{12} nur $\{\mathsf{eq}\}$ (entspricht $\{((0;0),(0;0),(0;0))\}$), $\{\mathsf{e}_{12}\}$ (entspricht $\{((0;0),(0;0),(1;0))\}$) und $\{\mathsf{eq},\ \mathsf{e}_{12}\}$. Entsprechend als nichttriviale Teilrelationen von d_{13} nur $\{\mathsf{eq}\}$ (entspricht $\{((0;0),(0;0),(0;0))\}$), $\{\mathsf{e}_{13}\}$ (entspricht $\{((0;0),(1;0),(0;0))\}$) und $\{\mathsf{eq},\ \mathsf{e}_{13}\}$, bzw. als nichttriviale Teilrelationen von d_{23} nur $\{\mathsf{eq}\}$ (entspricht $\{((0;0),(0;0),(0;0))\}$), $\{\mathsf{e}_{23}\}$ (entspricht $\{((0;0),(1;0),(1;0))\}$) und $\{\mathsf{eq},\ \mathsf{e}_{23}\}$.

$\square$(Korollar 71)

Da dies sowohl platzsparender als auch anschaulicher ist, kann man daher die Relation mit der sie repräsentierenden Menge identifizieren, also statt *Reg* R

einfach R schreiben. Meistens schreibe ich wegen des besseren Verständnisses weiterhin *Reg* R oder *Reg*(R). Als Relationssymbol für R werde ich aber häufig die repräsentierende Menge verwenden, entweder als komplexe Menge oder als Teilmenge der Ebene, strenggenommen unter Mißachtung der formalen Unterschiede. Insbesondere werde ich neue RST-Relationen durch die Angabe der sie repräsentierenden Menge definieren, und damit quasi als Vergröberung von $(\mathfrak{F})^{\cup} = \mathfrak{P}(\mathbb{C} \cup \infty)$. Je nach Situation verwende ich eine der drei Beschreibungsmöglichkeiten

$$\begin{array}{rcl} \{(0;0),(1;0),(x;y) & | & \mathsf{R}\ ((0;0),(1;0):(x;y))\} \\ = \{(x;y) & | & (x;y) \in Reg\,\mathsf{R}\} \\ = \{x + \imath y & | & (x;y) \in Reg\,\mathsf{R}\}. \end{array}$$

Beispiel 15 (Die Relationen von $\mathfrak{DC}$) *:*

(Repräsentation in $\mathbb{R}^2$) :

$$\begin{array}{lll}
\{\mathit{lf}\} = \{(x;y) \mid x > 1, y > 0\}, & \{\mathit{sf}\} = \{(x;y) \mid x > 1, y = 0\} & \{\mathit{rf}\} = \{(x;y) \mid x > 1, y < 0\}, \\
\{\mathit{lp}\} = \{(x;y) \mid x = 1, y > 0\}, & \{\mathit{e}_{23}\} = \{(x;y) \mid x = 1, y = 0\}, & \{\mathit{rp}\} = \{(x;y) \mid x = 1, y < 0\}, \\
\{\mathit{lc}\} = \{(x;y) \mid x \in\ ]0,1[\ , y > 0\}, & \{\mathit{sc}\} = \{(x;y) \mid x \in\ ]0,1[\ , y = 0 & \{\mathit{rc}\} = \{(x;y) \mid x \in\ ]0,1[\ , y < 0\}, \\
\{\mathit{ll}\} = \{(x;y) \mid x = 0, y > 0\}, & \{\mathit{e}_{13}\} = \{(x;y) \mid x = 0, y = 0\}, & \{\mathit{rl}\} = \{(x;y) \mid x = 0, y < 0\}, \\
\{\mathit{lb}\} = \{(x;y) \mid x < 0, y > 0\}, & \{\mathit{sb}\} = \{(x;y) \mid x < 0, y = 0\}, & \{\mathit{rb}\} = \{(x;y) \mid x < 0, y < 0\}
\end{array}$$

(Repräsentation in $\mathbb{C}$) :

$$\begin{array}{lll}
\{\mathit{lf}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z > 1, Im z > 0\}, & \{\mathit{sf}\} =\ ]1,\infty[\ , & \{\mathit{rf}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z > 1, Im z < 0\}, \\
\{\mathit{lp}\} = \{(1 + y\imath \mid y \in \mathbb{R}^+\}, & \{\mathit{e}_{23}\} = \{1\}, & \{\mathit{rp}\} = \{(1 - y\imath \mid y \in \mathbb{R}^+\}, \\
\{\mathit{lc}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z \in\ ]0,1[\ , Im z > 0\}, & \{\mathit{sc}\} =\ ]0,1[\ , & \{\mathit{rc}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z \in\ ]0,1[\ , Im z < 0\}, \\
\{\mathit{lb}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z < 0, Im z > 0\}, & \{\mathit{sb}\} =\ ]-\infty,0[\ , & \{\mathit{rb}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re z < 0, Im z < 0\}, \\
\{\mathit{ll}\} = \{y\imath \mid y \in \mathbb{R}^+\}, & \{\mathit{e}_{13}\} = \{0\}, & \{\mathit{rl}\} = \{-y\imath \mid y \in \mathbb{R}^+\}
\end{array}$$

4.2 Der verfeinerte Kalkül für 3 Punkte und Orientierung ($\mathfrak{RC}$)

Nach Satz 48, Beispiel 10 existiert zu jeder Relationenalgebra eine permutationsvollständige Verfeinerung. Insbesondere gibt es eine Verfeinerung der Doppelkreuz-Relationenalgebra, die permutationsvollständig ist. Man erhält sie durch Aufteilen der Relationen $\{\mathit{lc}\}$ und $\{\mathit{rc}\}$, in Unterrelationen, die die Permutationsvollständigkeit verletzen, und durch Hinzufügen der Relationen eq und e_{12}. Das so entstandene permutationsvollständige Kalkülmodell heiße $\mathfrak{RC}$.

4.2.1 Die Relationen von $\mathfrak{RC}$

$\mathfrak{RC}$ entsteht aus Freksas Kalkül durch Aufteilen der Relationen $\{\mathit{lc}\}$ und $\{\mathit{rc}\}$, die die Permutationsvollständigkeit verletzen, in jeweils drei Unterrelationen, wie durch den Beweis zu Satz 48 vorgegeben. Dabei entspricht jeder der

drei möglichen transformierten Relationen eine Unterrelation. Von diesen drei permutierten Basisrelationen ist jeweils eine konzeptionell benachbart zu den anderen zwei und trennt sie, das heißt die anderen zwei permutierten Basisrelation sind nicht konzeptionell benachbart. Nach Beispiel 13 ist die Relation $\{\mathfrak{lp}\}$ diese trennende Relation für $\{\mathfrak{lf}, \mathfrak{lp}, \mathfrak{lc}\}$ (beziehungsweise $\{\mathfrak{rp}\}$ für $\{\mathfrak{rf}, \mathfrak{rp}, \mathfrak{rc}\}$, $\{\mathfrak{ll}\}$ für $\{\mathfrak{lc}, \mathfrak{ll}, \mathfrak{lb}\}$, $\{\mathfrak{rl}\}$ für $\{\mathfrak{rc}, \mathfrak{rl}, \mathfrak{rb}\}$). Für jede Instantiation, die erfüllt, erfüllt $\pi(a,b,c)$ diese trennende Basisrelation genau dann, wenn c auf dem Thaleskreis liegt, der durch a und b definiert ist, weil der dritte Winkel ein rechter Winkel ist.
Weil die Transformationen stetig sind, wie im Transformationssatz 78 gezeigt wird, definiert eine Relationenalgebra, die die diesen Thaleskreis von seinen konzeptionellen Nachbarn unterschiedet, eine Verfeinerung, die die Permutationen von $\{\mathfrak{lp}\}$ (beziehungsweise $\{\mathfrak{rp}\}$, $\{\mathfrak{ll}\}$, $\{\mathfrak{rl}\}$) von jeder ihrer konzeptionellen Nachbarn unterscheidet. Ich werde in Satz 75 zeigen, daß die so definierte Verfeinerung $\mathfrak{RC}$, die zusätzlich $\mathfrak{eq}$ und $\mathfrak{e}_{12}$ enthält, tatsächlich permutationsvollständig ist.

Definition durch Winkel

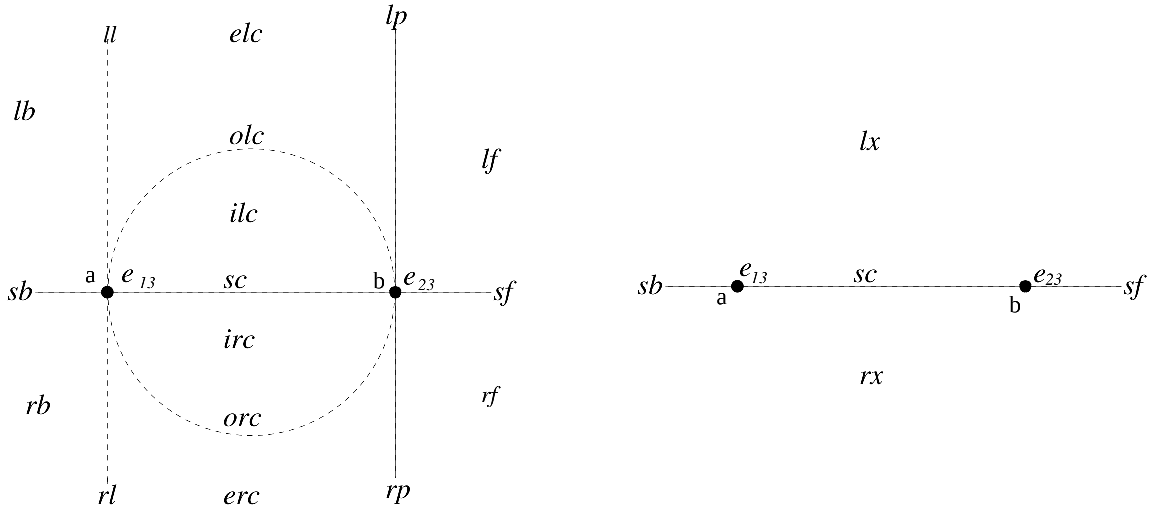
Wie $\mathfrak{DC}$ und $\mathfrak{SC}$, auf denen der Kalkül $\mathfrak{RC}$ basiert, unterscheidet $\mathfrak{RC}$ qualitativ zwischen verschiedenen Winkeln. Die qualitativen Winkel sind Elemente der Menge
$\{0^o,\ ]0^o;90^o[\,,\ 90^o,\ ]90^o;180^o[\,,\ 180^o,\ ]{-180^o};-90^o[\,,\ -90^o,\ ]{-90^o};0^o[\}$.
Im Gegensatz zu $\mathfrak{SC}$ und $\mathfrak{DC}$ bezieht sich die Unterscheidung bei $\mathfrak{RC}$ nicht auf nur einen oder 2 Winkel pro Relation ($\measuredangle bac$ und $\measuredangle abc$), sondern $\mathfrak{RC}$ schließt alle drei Winkel zwischen den drei Punkten des Tripels in die Definition der Relation ein und garantiert dadurch Permutationsvollständigkeit und die JEPD-Basis. Denn jedes Tripel in U^3 definiert genau ein instanzierbares geordnetes Tripel von qualitativen Winkeln, und jedes solche Winkeltripel definiert genau eine Basisrelation, verschiedene Relationen beinhalten daher verschiedene Tripel. Jedes CSP, das durch diese qualitativen Winkel definiert ist, kann also eindeutig durch $\mathfrak{RC}$ beschrieben werden.
Im Fall, daß zwei Punkte koinzidieren, bleiben die Winkel bei diesen Punkten undefiniert. Dieser Fall tritt bei den vier Beziehungen $\mathfrak{eq}$, $\mathfrak{e}_{12}$, $\mathfrak{e}_{23}$ und $\mathfrak{e}_{13}$ auf. in allen anderen Fällen, formen die drei Punkte ein (möglicherweise degeneriertes) Dreieck. Daher haben alle drei Winkel die gleiche Orientierung und ihre Werte können sich zu 180^o aufaddieren. Dafür gibt es 17 Möglichkeiten. Sie sind in Tabelle B.1 aufgelistet. Es folgt, daß höchstens einer der qualitativen Winkel 90^o oder mehr beträgt.
Die 21 verschiedenen Basisrelationen sind in Tabelle B.1 definiert. Relationen, die sich nur in verschieden Vorzeichen (+ oder -) oder Ordnungen der qualitativen Winkel unterscheiden, sind transformierte Relationen voneinander.

Definition 72 (Typ) *Relationen, die durch Transformationsoperationen ineinander übergehen, heißen vom gleichen **Typ***

In $\mathfrak{RC}$ gibt es die 6 Typen, die jeweils durch die Äquivalenzklasse der Relationen repräsentiert werden, die in Tabelle B.1 im gleichen Kasten vorkommen. Dies sind die Typen *eq*, *pin*, *col*, *obtr*, *ritr*, *actr*.

Definition durch Regionen

Wie im vorigen Abschnitt 4.1 gesehen, kann $\mathfrak{RC}$ als (vollständige) JEPD-Relationenalgebra durch eine Partition der Ebene repräsentiert werden. Sei $\Phi = \mathbb{R} \cup \imath\mathbb{R} \cup \{1 + \imath y \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$ In $\mathfrak{RC}$ sind die repräsentierenden Regionen definiert als $\{0\} = \{e_{13}\}$, $\{1\} = \{e_{23}\}$, (Punktrelationen), die Zusammenhangskomponenten von $\Phi - \{0, 1\}$ (1-dimensionale Regionen), und die Zusammenhangskomponenten der Ebene $\mathbb{C} - \Phi$ (2-dimensionale Regionen), entsprechend den Basisrelationen wie in Abbildung 4.1 a. Also zusammen mit $\{eq\}$ und $\{e_{12}\}$ besteht RC aus 21 Basisrelationen.



a. Die repräsentierbaren Basisrelationen des feinen Kalküls

b. Die repräsentierbaren Basisrelationen des konvexen Kalküls

Abbildung 4.1: a. Die Relationen von $\mathfrak{RC}$ als Regionen der (komplexen) Ebene b. Die Relationen von $\mathfrak{Cv}$ als Regionen der (komplexen) Ebene

Arithmetische Definition

Um die Relation einer gegebenen Instantiation zu bestimmen, ist es am praktischten, das Skalarprodukt der Verbindungsvektoren der Seiten der Dreieck zu berechnen. Sei α der Winkel zwischen diesen Seiten. Das Skalarprodukt der zwei Seiten ist genau dann gleich 0, wenn $\alpha = 90^o$ oder $\alpha = -90^o$. Es ist positiv, genau dann, wenn $|\alpha| < 90^o$ ist, und negativ genau dann, wenn $\alpha > 90^o$. Weil das Skalarprodukt unter Orientierungswechsel invariant ist, $\mathfrak{RC}$ aber nicht, muß zusätzlich ein Wert berechnet werden, der bestimmt, ob c auf der Referenzlinie $\ell(a, b)$ oder links oder rechts davon liegt. Ich werde ihn ***Orientierungswert*** Ω. nennen

Angenommen, die Instantiation ist in komplexen Zahlen gegeben. Wenn $b = a$ ist, dann genügt ein Vergleich von a und c, um die Relation zu bestimmen, sonst bestimmt der Wert $c' = \eta(c) = (c - a) \cdot \frac{1}{b-a}$ die Relation. Denn diese Formel als Funktion von c aufgefaßt stellt die Eichung dar, die b auf $b' = 1$ und a auf $a' = 0$ und c auf c' ohne Verzerrung der Winkel abbildet, weil die Subtraktion von a der Translation τ und die Multiplikation mit $\frac{1}{b-a}$ der Drehstreckung $\sigma \circ \rho$ entspicht.

c' liegt genau in einer der 19 durch die komplexen Punkte $a' = 0$ und $b' = 1$ definierten Regionen aus Abbildung 4.1.

Angenommen, die Instantiation sei gegeben in Paaren von reellwertigen Koordinaten der Punkte. Sei $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ und $c = (c_1, c_2)$. Dann erhalten wir durch Identifikation mit den entsprechenden komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} \eta(c_1 + c_2\imath) &= \frac{((c_1-a_1)+(c_2-a_2)\imath)}{(b_1-a_1)+(b_2-a_2)\imath} = \frac{((c_1-a_1)+(c_2-a_2)\imath)\cdot(b_1-a_1)+(b_2-a_2)\imath}{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \\ \text{Also } Im(\eta(c_1 + c_2\imath)) &= -\frac{(c_1-a_1)(b_2-a_2)-(c_2-a_2)(b_1-a_1)}{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \end{aligned}$$

Beachte, daß $Im(c')$ bestimmt, ob c Relation links von der Linie $\ell(a, b)$ liegt (genau dann, wenn $Im(c') > 0$), oder direkt auf $\ell(a, b)$ (genau dann, wenn $Im(c') = 0$) oder rechts von $\ell(a, b)$ (genau dann, wenn $Im(c') < 0$) liegt.

Daher ist $\Omega = (c_1 - a_1)(b_2 - a_2) - (c_2 - a_2)(b_1 - a_1)$ ein geeigneter Orientierungswert. [4] Also bestimmt Ω zusammen mit den Skalarprodukten

$A := (b_1 - a1)(c_1 - a_1) + (b_2 - a_2)(c_2 - a_2)$ der Seiten bei Punkt a,

$B := (a_1 - b1)(c_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(c_2 - b_2)$ bei Punkt b und

$\Gamma := (c_1 - a1)(c_1 - b_1) + (c_2 - a_2)(c_2 - b_2)$ bei Punkt c

die Relationen von $\mathfrak{RC}$.

[4] Beim Vergleich von $Re(c')$ mit 0 erhält man die Formel für das Skalarprodukt bei a, und eine etwas kompliziertere Rechnung für $Re(c')$ mit 1 bzw. $|c' - \frac{1}{2}|$ mit $\frac{1}{2}$ liefert die anderen zwei Skalarprodukte.

Die Tabelle B.1 faßt zusammen, wie die Relationen durch A, B, Γ und Ω definiert sind, die wiederum durch die Winkel und die Orientierung bestimmt sind.

4.2.2 Eigenschaften von $\mathfrak{RC}$

Da die Basisrelationen durch die Bedingungen an A, B, Γ und Ω bestimmt sind, erhalten wir den folgenden

Satz 73 (Beschreibbarkeit von $\mathfrak{RC}$ in der Arithmetik) *:*
Jedes $\mathfrak{RC}$-CSP ist eine PL1-Formel über der Signatur $\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$.

Beweis:
Jedes CSP ist eine Konjunktion einer Disjunktion von Basisrelationen, und jede Basisrelation kann als eine Konjunktion von Bedingungen an (d. h. Aussagen über) ihre Elemente ausgedrückt werden. Diese Bedingungen können in PL1 unter Verwendung von Addition, Subtraktion, Multiplikation und Vergleichsoperationen ausgedrückt werden, indem für jedes Element der CSP zwei Variablen für seine Koordinatenwerte eingeführt werden.

$\square$(Satz 73)

Wegen der Vererbung der Beschreibbarkeit (Satz 46) auf gröbere Kalküle folgt:

Korollar 74 (Beschreibbarkeit von $\mathfrak{DC}$, $\mathfrak{SC}$ in der Arithmetik) *:*
Jedes $\mathfrak{SC}$-CSP und jedes $\mathfrak{DC}$-CSP ist eine PL1-Formel über der Signatur $\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$.

Satz 75 (Vollständigkeitseigenschaften von $\mathfrak{RC}$) *:*
$\mathfrak{RC}$ ist permutationsvollständig, aber nicht kompositionsvollständig.

Beweis:
Diese Permutationsvollständigkeit gilt, weil jede Relation durch die Winkel definiert ist, und jede Permutation der Punkte wieder genau eine erfüllbare Kombination von Winkeln in der gleichen Kategorie von Tabelle B.1 ergibt, die somit die klar definierte transformierte Relation ist.

Die Kompositionsunvollständigkeit von $\mathfrak{RC}$ folgt analog zur Kompositionsunvollständigkeit von $\mathfrak{DC}$:

$$a^\theta = (0;0), \quad b^\theta = (1;0), \quad c^\theta = (1;2), \quad d^\theta = (0;1)$$

Relation	$\angle cab$	$\angle abc$	$\angle bca$	A	B	Γ	Ω
alle Punkte koinzidieren (eq):							
eq	undef.	undef.	undef.	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
zwei Punkte koinzidieren (pin):							
e_{12}	undef.	undef.	0	$= 0$	$= 0$	> 0	$= 0$
e_{13}	undef.	0	undef.	$= 0$	> 0	$= 0$	$= 0$
e_{23}	0	undef.	undef.	> 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$
Punkte kolinear (degeneriertes Dreieck) (colinear : col):							
sb	180	0	0	< 0	> 0	> 0	$= 0$
sf	0	180	0	> 0	< 0	> 0	$= 0$
sc	0	0	180	> 0	> 0	< 0	$= 0$
stumpfwinkliges Dreieck (obtuse triangle: $obtr$):							
lb	]-180,-90 [	]-90,0 [	]-90,0 [	< 0	> 0	> 0	< 0
rb	]180,90 [	]90,0 [	]90,0 [	< 0	> 0	> 0	> 0
lf	]-90,0 [	]-180,-90 [	]-90,0 [	> 0	< 0	> 0	< 0
rf	]90,0 [	]180,90 [	]90,0 [	> 0	< 0	> 0	> 0
ilc	]-90,0 [	]-90,0 [	]-180,-90 [	> 0	> 0	< 0	< 0
irc	]90,0 [	]90,0 [	]180,90 [	> 0	> 0	< 0	> 0
rechtwinkliges Dreieck (right-angled triangle : $ritr$):							
ll	-90	]-90,0 [	]-90,0 [	$= 0$	> 0	> 0	< 0
rl	90	]90,0 [	]90,0 [	$= 0$	> 0	> 0	> 0
lp	]-90,0 [	-90	]-90,0 [	> 0	$= 0$	> 0	< 0
rp	]90,0 [	90	]90,0 [	> 0	$= 0$	> 0	> 0
olc	]-90,0 [	]-90,0 [	-90	> 0	> 0	$= 0$	< 0
orc	]90,0 [	]90,0 [	90	> 0	> 0	$= 0$	> 0
spitzwinkliges Dreieck (acute-angled triangle : $actr$):							
elc	]-90,0 [	]-90,0 [	]-90,0 [	> 0	> 0	> 0	< 0
erc	]90,0 [	]90,0 [	]90,0 [	> 0	> 0	> 0	> 0

Tabelle 4.1: Die Definition der Relationen von $\mathfrak{RC}$ ist sowohl durch die Winkel als auch (als arithmetische Alternative für den Computer) durch die Werte A, B, Γ, Ω möglich.

ist Instanz der Komposition

$$\{\ ll\ \}(a, b : d)\ {}_3\diamond_1\ \{\ ll\ \}(d, b : c) \supset \{1 + 2\imath\}$$

$Rel_{\mathfrak{RC}}((0;0),(1;0),(1;1)) = Rel_{\mathfrak{RC}}((0;0),(1;0),(1;2))$, doch zu $((0;0),(1;0),(1;1))$ existiert keine Fortsetzung zu einer Instanz der Komposition ${}_3\diamond_1$.[5]

□(Satz 75)

Bemerkung 76 (Invarianz) *:*
Als RST-Relationenalgebra ist $\mathfrak{RC}$ invariant unter Translation (affiner Verschiebung), Rotation und zentrischer Streckung. Es ist nicht invariant unter Achsenspiegelung und daher nicht invariant unter beliebigen linearen Abbildungen.

Dieses Eigenschaft folgt sofort, weil die Basisrelationen durch die orientierten Winkel und die Koinzidenz von Punkten vollständig definiert sind, und diese sind genau unter den angegebenen Abbildungen invariant.

4.3 Topologische Eigenschaften

Im folgenden verwende ich für RST-Relationen Begriffe aus der Topologie, worunter zu verstehen ist, daß die entsprechende Aussage für die repräsentierenden Regionen gilt. Beispielsweise nenne ich eine Relation offen, falls die sie repräsentierende Region offen ist. Punktrelationen sind abgeschlossen, auch $\{e_{12}\}$ sei abgeschlossen. Offensichtlich sind zwar diese Relationen nicht abgeschlossen als Teilmenge von U^3, denn die Relation $\{eq\}$ ist immer Teilmenge des Randes der Relation in U^3. Dies soll aber nicht stören. Im folgenden auftauchende topologische Begriffe beziehen sich also immer auf die Regionen. Dabei sei insbesondere der Rand $\partial\ \mathsf{R}$ einer RST-Relation die punktiert repräsentierbare RST-Relation, die durch $\partial Reg(\mathsf{R})$ repräsentiert wird (also per Definition $\{eq\} \not\subset \partial\ \mathsf{R}$), und der (topologische) Abschluss die Vereinigung der Relation mit ihrem Rand.
Beispiel:
$\{e_{23},\ e_{12}\}$ ist der Rand und $\{e_{23},\ sf,\ e_{12}\} = [1, \infty]$ ist der (topologische) Abschluss von $\{sf\} =]1, \infty[$.

Anmerkung:
Dies ist konsistent für die bisher eingeführten Operationen. Denn da jede Region eine Vereinigung von Äquivalenzklassen repräsentiert, gilt, daß die Vereinigung und Schnitt zweier RST-Relationen (als Punktetripel) genau von der

[5]Die Kompositionsunvollständigkeit folgt auch aus Satz 95 in Abschnitt **??**.

Vereinigung, beziehungsweise dem Schnitt der repräsentierenden Regionen repräsentiert werden. Daher überträgt sich auch die Inklusionsbeziehung, Disjunktheit (denn die Äquivalenzklassen sind disjunkt). Ferner ist eine Menge von Relationen M erschöpfend, genau dann wenn sie $\{eq\}$ abdeckt und die sie (punktiert) repräsentierende Regionenmenge die punktierte Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ überdeckt.
Daraus folgt, daß man jede JEPD-Relationenalgebra durch eine Partitionierung der punktierten Ebene beschreiben kann, weil $\{eq\}$ in jeder Relationenalgebra enthalten ist. Auf diese Weise werden im folgenden die Relationen der eingeführten Relationenalgebren definiert werden.

Bemerkung 77 *Zwei repräsentierbare RST-Relationen sind konzeptionell benachbart, wenn die entsprechenden repräsentierenden Regionen konzeptionell benachbart sind.*

Beweis:
Diese Aussage gilt, weil die Äquivalenzklassen wegzusammenhängend sind, weil sich jedes Tripel stetig in seinen Repräsentanten transformieren läßt. Seien $p_R \in \mathsf{R}$ und p_S in S zwei Tripel, dann gibt es also einen stetigen Weg in U^3 von p_R zu seinem Repräsentanten p'_R der ganz in R bleibt und von p_S zu seinem Repräsentanten p'_S ganz in S.
Wenn die Regionen konzeptionell benachbart sind, gibt es einen stetigen Weg von p'_R nach p'_S, dessen Punkte alle in R oder S liegen. Der stetige Weg von p_R nach p_S, der aus diesen dreien zusammengesetzt ist, beweist die konzeptionelle Nachbarschaft von R und S. Für die umgekehrte Richtung setzen wir voraus, daß die Relationen R und S konzeptionell benachbart sind. Seien $p_R \in Reg(\mathsf{R})$ und $p_S \in Reg(\mathsf{S})$ zwei Punkte in den entsprechenden Regionen. Dann gibt es eine stetige Verbindung v von Tripel $((0;0),(1;0),p_R)$ nach $((0;0),(1;0),p_S)$, dessen Tripel t alle in $\mathsf{R} \cup \mathsf{S}$ sind. Die Eichungen $\{\eta(t) \mid t \in v\}$ bilden einen stetigen Weg von p_R nach p_S.

$\square$(Bemerkung)

4.4 Transformation und Komposition

Satz 78 (Transformationssatz) *:*
Bilder von RST-Relationen unter Transformationsoperationen sind wieder RST-Relationen. Die Transformationsoperationen sind stetige Abbildungen auf den repräsentierbaren Relationen, wobei Bilder offener Relationen wieder offene

Relationen sind. Für ihre komplexe Repräsentationen gilt:

$$\begin{array}{rlll} z \in Reg\mathsf{R} & \Longleftrightarrow & (1-z) & \in \mathsf{R}^{(12)} \\ & \Longleftrightarrow & \frac{1}{z} & \in Reg\mathsf{R}^{(23)} \\ & \Longleftrightarrow & \frac{z}{z-1} & \in Reg\mathsf{R}^{(13)} \\ & \Longleftrightarrow & \frac{1}{1-z} & \in Reg\mathsf{R}^{(231)} \\ & \Longleftrightarrow & 1-\frac{1}{z} & \in Reg\mathsf{R}^{(312)} \end{array}$$

Beweis:
Der Satz ist trivial für die Identität.
Nach Bemerkung 67 bleibt die Eigenschaft, RST-Relation zu sein, unter Transformationsoperationen erhalten.
Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichne im folgenden (z_1, z_2, z_3) das Tripel $((Rez_1; Imz_1), (Rez_2; Imz_2), (Rez_3; Imz_3))$, wobei $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Dann bezeichnet $\eta_{\mathbb{C}}((z_1, z_2, z_3)) = (0, 1, \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1})$ die Eichung von (z_1, z_2, z_3), denn die Subtraktion $\tau_{\mathbb{C}} : z \mapsto z - z_1$ entspricht der Translation τ, und die Multiplikation $\rho_{\mathbb{C}} : z \mapsto \frac{1}{z_2-z_1} \cdot z$ entspricht der Drehstreckung der zugehörigen Tripel.
Aus $\mathsf{R}\ (z_1, z_2 : z_3)$ folgt also $z = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in Reg\mathsf{R}$. Also Sei $z \in \mathbb{C}$ in R enthalten, dann gilt:

$$(z_1^\pi, z_2^\pi, z_3^\pi) := (z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(3)}) \in \mathsf{R}^\pi \Longleftrightarrow (z_1, \ldots, z_3) \in \mathsf{R}$$

Sei nun $z \in Reg\mathsf{R}$, also $\mathsf{R}\ (0, 1 : z)$. Dann enthält also nach dem Eichkorollar 71 R^π den Wert $z^\pi := \frac{z_3^\pi - z_1^\pi}{z_2^\pi - z\pi_1}$, genau dann, wenn $z_i^\pi = z_{\pi(i)}$, wobei $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = z$.

Die transformierten Punkte z^π ergeben sich nun durch Einsetzen der Werte:
Für die Inversionsoperation ergibt sich:

$$\begin{array}{l} z_1^{(12)} = z_2 = 1, \\ z_2^{(12)} = z_1 = 0, \\ z_3^{(12)} = z_3 = z, \quad \Longrightarrow \quad z^{(12)} = 1 - z \end{array}$$

Für die Konversionsoperation ergibt sich:

$$\begin{array}{l} z_1^{(23)} = z_1 = 0, \\ z_2^{(23)} = z_3 = z, \\ z_3^{(23)} = z_2 = 1, \quad \Longrightarrow \quad z^{(23)} = \frac{1}{z} \end{array}$$

Für die Reversionsoperation ergibt sich:

$$\begin{array}{l} z_1^{(13)} = z_3 = z, \\ z_2^{(13)} = z_2 = 1, \\ z_3^{(13)} = z_1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad z^{(13)} = \frac{z}{z-1} \end{array}$$

Für die Rotationsoperation ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1^{(231)} &= z_2 = 0, \\ z_2^{(231)} &= z_3 = z, \\ z_3^{(231)} &= z_1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad z^{(231)} = \tfrac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Für die Torsionsoperation ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1^{(321)} &= z_3 = z, \\ z_2^{(321)} &= z_1 = 0, \\ z_3^{(321)} &= z_2 = 1, \quad \Longrightarrow \quad z^{(23)} = 1 - \tfrac{1}{z} = \tfrac{z-1}{z} \end{aligned}$$

Unter der Definition von

$$\frac{1}{0} = \infty, \;\; \infty - 1 = \infty, \;\; 1 - \infty = \infty, \;\; \frac{1}{\infty} = 0 \text{ und } \frac{\infty}{\infty} = 1$$

gelten diese Beziehungen auch für punktierte Repräsentationen.
Offensichtlich sind alle diese Abbildungen stetig. Da ihre Umkehrungen wieder Transformationsoperationen aus dieser Menge sind, bilden sie als Umkehrabbildungen stetiger Abbildungen offene Mengen auf offene ab.

□(Satz **??**)

Diese Eigenschaft ermöglicht es, mit RST-Relationen zu "rechnen". Beispielsweise kann man berechnen, daß die Relationen, die ihre eigenen invers transformierten sind, genau die Relationen sind, die mit z auch $1-z$ enthalten. Die einzigen Punktrelationen mit dieser Eigenschaft sind diejenigen { z }, für die $z = 1 - z$ gilt, also $\mathit{Midpoint}$=$\{\frac{1}{2}\}$ und $\{e_{12}\}$=$\{\infty\}$.

Korollar 79 (Invarianzen unter Transformationen) *:*
In RST-Relationenalgebren gilt: Die Transformationsoperationen bilden Punktrelationen auf Punktrelationen ab und erhalten konzeptionelle Nachbarschaft. Insbesondere bilden sie den Abschluss einer Relation auf den Abschluss ihres Bildes ab und $(\partial \mathsf{R})^\pi = \partial(\mathsf{R}^\pi)$

Beweis:
Daß Punktrelationen auf Punktrelationen abgebildet werden, folgt unmittelbar aus dem Transformationssatz 78, weil $\mathit{Reg}\ \mathsf{R}$ gleichmächtig wie $\mathit{Reg}\ \mathsf{R}^\pi$ ist.
Konzeptionelle Nachbarschaft:
Seien R und S konzeptionell benachbart, und $z_R^\pi \in$ und $z_S^\pi \in \mathit{Reg}(\mathsf{S}^\pi)$ ein in S^π enthaltener Punkt. Sei nun $z_R \in \mathit{Reg}(\mathsf{R})$ so gewählt, daß z_R^π derzugehörige

transformierte Punkt ist, also beispielsweise $z_R = 1 - z_R^{(12)}$ für die Inversion. Entsprechend $z_S \in Reg(\mathsf{S})$. Sei nun $w : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$w(0) = z_R, \;\; w(1) = z_S$$

ein stetiger Weg von z_R nach z_S, der ganz in $R \cup S$ verläuft. Dann ist nach Permutationssatz $w^\pi : w^\pi(t) := (w(t))^\pi$ ein stetiger Weg von z_R^π nach z_S^π, der ganz in $R^\pi \cup S^\pi$ verläuft. Damit ist gezeigt, daß die konzeptionelle Nachbarschaft erhalten bleibt. Der Abschluss von R besteht genau aus den Punktrelationen, die mit R konzeptionell benachbart sind. Daraus (oder direkt aus der Stetigkeit) folgt, daß Permutationen den Abschluss erhalten. Der Rand überträgt sich trivialerweise, weil sich der Abschluss und der Abschluss des Komplements gemäß Bemerkung 58.2. übertragen.

$\square$(Korollar)

In jedem Kalkül, der in eine zylindrische Algebra im obigen Sinn eingebettet ist, gilt die folgende Aussage:

Satz 80 (Trivialität unsymmetrischer loser Kompositionen) *:*
1.

$$\mathsf{R}_1 \;\rhd_1\; \mathsf{R}_2 \subset c_3(\mathsf{R}_1), \qquad \mathsf{R}_1 \rhd_2 \mathsf{R}_2 \subset c_3(\mathsf{R}_1),$$
$$\mathsf{R}_1 \;{}_1\!\lhd\; \mathsf{R}_2 \subset c_1(\mathsf{R}_2) \quad \textit{und}\; \mathsf{R}_1 \;{}_2\!\lhd \mathsf{R}_2 \subset c_1(\mathsf{R}_2)$$

2. In jeder RST-Relationenalgebra gilt für reguläre Relationen R_1 *und* R_2 *sogar*

$$\mathsf{R}_1 \;\rhd_1\; \mathsf{R}_2 = c_3(\mathsf{R}_1), \qquad \mathsf{R}_1 \;\rhd_2\; \mathsf{R}_2 = c_3(\mathsf{R}_1),$$
$$\mathsf{R}_1 \;{}_1\!\lhd \mathsf{R}_2 = c_1(\mathsf{R}_2) \quad \textit{und}\; \mathsf{R}_1 \;{}_2\!\lhd \mathsf{R}_2 = c_1(\mathsf{R}_2).$$

Beweis:

1.
$$\begin{aligned}(v,w,y) \in (\mathsf{R}_1 \rhd_1 \mathsf{R}_2) \quad &\Longleftrightarrow \exists\, x,z : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \;\text{ und }\; (x,y,z) \in \mathsf{R}_2 \\ &\Longrightarrow \exists\, x : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \;\wedge\; (\exists\, z : (x,y,z) \in \mathsf{R}_2) \\ &\Longrightarrow \exists\, x : (v,w,x) \in \mathsf{R}_1 \;\;\Longleftrightarrow\;\; (v,w,y) \in c_3(\mathsf{R}_1).\end{aligned}$$

Die anderen drei Aussagen lassen sich analog nachweisen.

2. Wegen 1., genügt es zu zeigen, daß $c_3(\mathsf{R}_1) \subset \mathsf{R}_1 \rhd_1 \mathsf{R}_2$.
Angenommen, $c_3(\mathsf{R}_1)$ $(v,w:x)$ Wenn R_1 regulär ist, dann kann für v,w der Punkt $x \neq y$ so gewählt werden, daß R_1 $(v,w:x)$ Beachte, daß für RST-Relationenalgebren, für jede reguläre Relation R_2 und für je zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ es einen dritten Punkt z gibt, der R_2 $(x,y:z)$ erfüllt. Die anderen drei Aussagen lassen sich analog nachweisen.

□(Satz 80)

Satz 80 zeigt, daß fast in allen Fällen die lose Komposition trivial ist, weil die Komposition nicht zu neuen expliziten Informationen führen. Deshalb betrachte ich von nun an nur noch die steife Komposition. Unter Kompositionen verstehe ich weiterhin ausnahmslos steife Kompositionen. Für sie ergeben sich ähnlich wie beim Transformationssatz 78 aus der Eichung arithmetische Konsequenzen, die den Grundstein für die Überlegungen zur Existenz kompositionsvollständiger Relationenalgebren und zur Ausdrucksmächtigkeit im nächsten Kapitel (Abschnitt **??**) bilden.

Satz 81 (Kompositionssatz) *:*
Kompositionen von RST-Relationen sind RST-Relationen Die Kompositionsoperationen sind stetige Abbildungen auf repräsentierbaren Relationen, wobei und Bilder offener Relationen offene Relationen sind. Für die komplexe Repräsentationen repräsentierbarer Relationen gilt:

$$\begin{aligned}
Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2) &= \{(z_1 \cdot z_2) \mid \ z_1 \in Reg(\mathsf{R}_1) \wedge z_2 \in Reg(\mathsf{R}_2)\} \\
Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_1 \ \mathsf{R}_2) &= \{(z_1 + z_2 - z_1 z_2) \mid \ z_1 \in Reg(\mathsf{R}_1) \wedge z_2 \in Reg(\mathsf{R}_2)\} \\
Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_2\diamond_1 \ \mathsf{R}_2) &= \{\tfrac{(z_1 \cdot z_2)}{z_1 + z_2 - 1} \mid \ z_1 \in Reg(\mathsf{R}_1) \wedge z_2 \in Reg(\mathsf{R}_2)\}
\end{aligned}$$

Beweis:
Die erste Aussage gilt nach Bemerkung 67 am Anfang des Kapitels. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichne im folgenden (z_a, z_b, z_c) wieder das Tripel $((Rez_a; Imz_a), (Rez_b; Imz_b), (Rez_c; Imz_c))$, wobei $z_a, \ldots, z_c \in \mathbb{C}$. Dann bezeichnet $\eta_{\mathbb{C}}((z_a, z_b, z_c)) = (0, 1, \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a})$ die Eichung von (z_a, z_b, z_c), wie beim Transformationssatz 78.
Betrachte nun zuerst die Komposition $\mathsf{R}_1 \ (z_a, z_b : z_d) \ \ {}_3\diamond_2 \ \ \mathsf{R}_2 \ (z_a, z_d : z_c)$
Falls $0 \in Reg\mathsf{R}_1, \ \infty \in Reg\mathsf{R}_2$, dann

$$z_3 \neq 0 \Rightarrow \ \ z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2),$$

denn $z_a \neq z_b, \ z_c = z_a + z_3(z_b - z_a), \ z_d = z_a$ erfüllt $\mathsf{R}_1 \ (z_a, z_b : z_d) \ \ {}_3\diamond_2 \ \ \mathsf{R}_2 \ (z_a, z_d : z_c)$

$$\text{und} \quad 0 \in Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2) \iff \{\mathit{eq}\} \subset \mathsf{R}_2.$$

Ansonsten

$$\begin{aligned}
& z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2) \\
\iff & \exists\, z_a, z_b, z_c \in \mathbb{C} : && z_3 = \tfrac{z_c - z_a}{z_b - z_c} \text{ und } \ \mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2 \ \mathsf{R}_2 \ (z_a, z_b : z_c) \\
\iff & \exists\, z_a, z_b, z_c, z_d \in \mathbb{C} : && \mathsf{R}_1 \ (z_a, z_b : z_d) \text{ und } \ \mathsf{R}_2 \ (z_a, z_d : z_c) \\
\iff & \exists\, z_a, z_b, z_c, z_d \in \mathbb{C} : && \tfrac{z_d - z_a}{z_b - z_a} \in Reg\mathsf{R}_1 \text{ und } \tfrac{z_c - z_a}{z_d - z_a} \in Reg\mathsf{R}_2 \\
\iff & \exists\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} : && z_1 \in Reg\mathsf{R}_1 \text{ und } z_2 \in Reg\mathsf{R}_2 \text{ und } z_3 = z_1 z_2.
\end{aligned}$$

Es folgt wegen dem Konvertierungssatz 58 für ${}_3\diamond_1$ bzw. ${}_2\diamond_1$:

$$
\begin{array}{lll}
 & & z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_1\ \mathsf{R}_2) \\
\Longleftrightarrow & & z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1^{(12)} \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2^{(12)})^{(12)} \\
\Longleftrightarrow & & (1-z_3) \in Reg(\mathsf{R}_1^{(12)} \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2^{(12)}) \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1^{(12)} \in Reg(\mathsf{R}_1^{(12)}), z_2^{(12)} \in Reg(\mathsf{R}_2^{(12)}) : & 1-z_3 = z_1^{(12)} \cdot z_2^{(12)} \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1 \in Reg(\mathsf{R}_1), z_2 \in Reg(\mathsf{R}_2) : & 1-z_3 = (1-z_1)(1-z_2) \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1 \in Reg\mathsf{R}_1, z_2 \in Reg\mathsf{R}_2 : & z_3 = z_1 + z_2 - z_1 z_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & & z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_2\diamond_1\ \mathsf{R}_2) \\
\Longleftrightarrow & & z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1^{(13)} \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2^{(13)})^{(13)} \\
\Longleftrightarrow & & (\frac{z_3}{z_3-1}) \in Reg(\mathsf{R}_1^{(13)} \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2^{(13)}) \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1^{(13)} \in Reg\mathsf{R}_1^{(13)}, z_2^{(13)} \in Reg\mathsf{R}_2^{(13)} : & \frac{z_3}{z_3-1} = z_1^{(13)} \cdot z_2^{(13)} \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1 \in Reg\mathsf{R}_1,\, z_2 \in Reg\mathsf{R}_2 : & \frac{z_3}{z_3-1} = (\frac{z_1}{z_1-1})(\frac{z_2}{z_2-1}) \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1 \in Reg\mathsf{R}_1\,,\, z_2 \in Reg\mathsf{R}_2 : & z_3 - 1 = z_3(\frac{z_1 z_2 - z_1 - z_2 + 1}{z_1 z_2}) \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1 \in Reg\mathsf{R}_1\,,\, z_2 \in Reg\mathsf{R}_2 : & 1 = z_3(\frac{z_1 + z_2 - 1}{z_1 z_2}) \\
\Longleftrightarrow & \exists\, z_1 \in Reg\mathsf{R}_1\,,\, z_2 \in Reg\mathsf{R}_2 : & z_3 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2 - 1}.
\end{array}
$$

Offensichtlich sind alle diese Abbildungen stetig.

Es ist noch zu zeigen, daß die Komposition von zwei offenen Relationen wieder offen ist. Ich zeige dazu zunächst, daß die Operation ${}_3\diamond_2$ diese Eigenschaft besitzt. Sei $z_3 \in Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2)$ Also existiert $z_1 \in Reg\mathsf{R}_1, z_2 \in Reg\mathsf{R}_2$ mit $z_3 = z_1 z_2$. Falls $z_2 \neq 0$, ist die unäre Operation: $z \mapsto z_2 z$ stetig umkehrbar, und das Bild einer offenen Umgebung von z_1 ist eine offene Umgebung von z_3. Falls $z_2 = 0$ ist, so ist $z_3 = 0$. $\{0\}$ ist nicht offen, also existiert $z_1 \neq 0 \in Reg\mathsf{R}_1$. Da R_2 offen ist, gilt für ein hinreichend kleines ε:

$$
\begin{array}{rll}
 & \{z \mid \ |z| < \varepsilon\} & \subset Reg(\mathsf{R}_2) \\
\Rightarrow & \{z \mid \ |z| < |z_1|\,\varepsilon\} & \subset Reg(\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2)
\end{array}
$$

Da die übrigen Komposionsoperationen nach dem Konvertierungssatz 58 Kompositionen aus Transformationsoperationen und der Kompositionsoperation ${}_3\diamond_2$ sind und die Transformationsoperationen nach dem Transformationssatz wieder stetige Abbildungen sind, bei denen die Bilder von RST-Relationen RST-Relationen und die Bilder offener Mengen offen sind, übertragen sich diese Aussagen auf alle Kompositionsoperationen.

□(Satz 81)

Korollar 82 (Invarianzen unter Kompositionsoperationen) *:*
In RST-Relationenalgebren gilt: Die Komposition zweier repräsentierbarer Punkt-

relationen $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2 \not\subset d_{\kappa\mu}$ *(wobei* $\lambda \neq \mu \neq \kappa$*) ist eine repräsentierbare Punktrelation.*[6]

Für alle κ, λ *erhalten die entsprechenden Kompositionsoperationen Teilmengenbeziehung, konzeptionelle Nachbarschaft und Abschluss in folgendem Sinn: Wenn* R_i *und* R'_i *konzeptionell benachbart sind, so sind auch die Relationen* $(\mathsf{R}_1 \ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_2)$ *und* $(\mathsf{R}'_1 \ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}'_2)$ *konzeptionell benachbart.*
$(R_1 \subset R_2) \quad \Rightarrow \quad (\mathsf{R} \ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_1) \subset (\mathsf{R} \ {}_\kappa\diamond_\lambda\ \mathsf{R}_2)$.
Außerdem ist die Komposition der (topologischen) Abschlüsse zweier Relationen der Abschluss ihrer Komposition.

Beweis:
Da diese Aussagen auch für Transformationsoperationen gelten, und jede Kompositionsoperation Komposition von Transformationsoperationen und der Komposition ${}_3\diamond_2$ ist, genügt es, die Aussagen für ${}_3\diamond_2$ zu zeigen.
Daß Punktrelationen auf Punktrelationen abgebildet werden, folgt unmittelbar aus $\{z_1\} \ {}_3\diamond_2\ \{z_2\} = \{z_1 z_2\}$ in Verbindung mit dem Konvertierungssatz.
Seien R_i und $\mathsf{R}'_i (i \leq 2)$ konzeptionell benachbart $z \in (\mathsf{R}_1 \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2)$, $z' \in (\mathsf{R}'_1 \ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}'_2)$. Seien nun $z_i \in Reg\,\mathsf{R}_i, z'_i \in R'_i$ so gewählt, daß $z = z_1 z_2, z' = z'_1, z'_2$.
Sei nun $w_i(t)\,(t \in [0,1]\,)$ mit $w_i(0) = z_i$, $w_i(1) = z'_i$ ein stetiger Weg von z_i nach z'_i, der ganz in $R_i \cup R'_i$ verläuft. Dann ist nach Konvertierungssatz $w(t) := w_1(t) \cdot w_2(t)$ ein stetiger Weg von z nach z', der ganz in $R \cup R'$ verläuft. Damit ist gezeigt, daß die konzeptionelle Nachbarschaft erhalten bleibt.
Der Abschluss von R besteht genau aus den Punktrelationen, die mit R konzeptionell benachbart sind. Daraus (oder direkt aus der Stetigkeit) folgt, daß Permutationen den Abschluss erhalten.

□(Korollar 82)

Anmerkung:
Komplement und Rand übertragen sich im allgemeinen nicht, da beispielsweise $]-1,0[\ {}_3\diamond_2\ ]-1,0[\ = \ ]0,1[$, nach dem Kompositionssatz, aber

$$]-1,0[\ {}_3\diamond_2\ (\mathbb{C} \setminus \ ]-1,0[\,) = \mathbb{C} \neq (\mathbb{C} \setminus \ ]0,1[\,),$$

denn für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ gilt: existiert eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so daß

$$-\varepsilon \in \ ]-1,0[\ \wedge -\frac{z}{\varepsilon} \in (\mathbb{C} \setminus \ ]-1,0[\,)$$

[6] Die übrigen Kompositionen von Punktrelationen ergeben sich durch die im Satz "Eigenschaften der Komposition" dargestellten Beziehungen.

und damit nach Kompositionssatz

$$z \in [-1,0] \ {}_3\diamond_2 \ (\mathbb{C} \setminus \ ]-1,0[\ )$$

und

$$-\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \in [-1,0] \ {}_3\diamond_2 \ (\mathbb{C} \setminus \ ]-1,0[\ ).$$

Und

$$(\partial(\ ]-1,0[\ {}_3\diamond_2 \ \overline{]-1,0[}\ ) = \partial(\mathbb{C}) = \emptyset \neq 0,1 = \partial(\ ]-1,0[\ ) \ {}_3\diamond_2 \ \partial(\overline{\ ]-1,0[}\ ).$$

4.5 Feinere und gröbere Kalküle

4.5.1 Der Konvexe Kalkül $\mathfrak{C}v$

Obwohl $\mathfrak{RC}$ sehr ausdrucksstark ist, hat es den Nachteil, nicht kompositionsvollständig zu sein. Schlüsse mittels Komposition sind daher nicht notwendigerweise informationserhaltend. Durch Weglassen der Information über rechte Winkel erhält man einen Kalkül, der weniger ausdrucksmächtig ist, aber dessen Regionen konvex sind. Ich werde diesen Kalkül den ***konvexe Kalkül*** nennen und seine Vervollständigung mit $\mathfrak{C}v$ bezeichnen.
Die Basisrelationen von $\mathfrak{C}v$ sind mit ihrem $\mathfrak{RC}$-Äquivalent und ihren Permutation in Tabelle 4.2 aufgelistet (vgl. Abbildung 4.1).

$\mathfrak{C}v$ -Basisrelation	$\mathfrak{RC}$-Äquivalent
$\{e_{12}\}$	$\{e_{12}\}$
$\{lx\}$ =left	$\{lf,\ lp,\ elc,\ olc,\ ilc,\ ll,\ lb\}$
$\{sf\}$	$\{sf\}$
$\{e_{23}\}$	$\{e_{23}\}$
$\{sc\}$	$\{sc\}$
$\{e_{13}\}$	$\{e_{13}\}$
$\{sb\}$	$\{sb\}$
$\{rx\}$ = right	$\{rf, rp,\ erc,\ orc, irc,\ rl,\ rb\}$

Tabelle 4.2: Definition der Relationen von $\mathfrak{C}v$ als Vergröberung von $\mathfrak{RC}$

$\mathfrak{C}v$ enthalte wie $\mathfrak{RC}$ die Operatoren der zylindrischen Algebren, die Permutation und die steifen Kompositionen wie in Definition 56 definiert. Daraus ergeben sich auch die Ergrebnisse der Transformationsoperationen für $\mathfrak{C}v$ als Verreinigung der Transformationsoperationen der in ihnen enthaltenen $\mathfrak{RC}$-Relationen, denn nach Satz 60 sind $\mathfrak{C}v$ und $\mathfrak{RC}$ Relationenalgebren, und es gilt die Distributivität der Permutation 57(T1). Die Transformationsoperationen sind in Tabelle 4.3 dargestellt. Anhand der Tabelle **??** sieht man, daß $\mathfrak{RC}$ kompostiotionsvollständig ist.

$\mathfrak{C}v$					
Relation:	Permutation:				
ID	INV	REV	CONV	ROT	TOR
$(x,y:z)$	$(y,x:z)$	$(z,y:x)$	$(x,z:y)$	$(y,z:x)$	$(z,x:y)$
$\{\mathfrak{e}_{12}\}$	$\{\mathfrak{e}_{12}\}$	$\{\mathfrak{e}_{23}\}$	$\{\mathfrak{e}_{23}\}$	$\{\mathfrak{e}_{13}\}$	$\{\mathfrak{e}_{13}\}$
$\{\mathfrak{lx}\}$	$\{\mathfrak{rx}\}$	$\{\mathfrak{rx}\}$	$\{\mathfrak{rx}\}$	$\{\mathfrak{lx}\}$	$\{\mathfrak{lx}\}$
$\{\mathfrak{sf}\}$	$\{\mathfrak{sb}\}$	$\{\mathfrak{sf}\}$	$\{\mathfrak{sc}\}$	$\{\mathfrak{sb}\}$	$\{\mathfrak{sc}\}$
$\{\mathfrak{e}_{23}\}$	$\{\mathfrak{e}_{13}\}$	$\{\mathfrak{e}_{12}\}$	$\{\mathfrak{e}_{23}\}$	$\{\mathfrak{e}_{12}\}$	$\{\mathfrak{e}_{13}\}$
$\{\mathfrak{sc}\}$	$\{\mathfrak{sc}\}$	$\{\mathfrak{sb}\}$	$\{\mathfrak{sf}\}$	$\{\mathfrak{sf}\}$	$\{\mathfrak{sb}\}$
$\{\mathfrak{e}_{13}\}$	$\{\mathfrak{e}_{23}\}$	$\{\mathfrak{e}_{13}\}$	$\{\mathfrak{e}_{12}\}$	$\{\mathfrak{e}_{23}\}$	$\{\mathfrak{e}_{12}\}$
$\{\mathfrak{sb}\}$	$\{\mathfrak{sf}\}$	$\{\mathfrak{sc}\}$	$\{\mathfrak{sb}\}$	$\{\mathfrak{sc}\}$	$\{\mathfrak{sf}\}$
$\{\mathfrak{rx}\}$	$\{\mathfrak{lx}\}$	$\{\mathfrak{lx}\}$	$\{\mathfrak{lx}\}$	$\{\mathfrak{rx}\}$	$\{\mathfrak{rx}\}$

Tabelle 4.3: Die Permutationen von $\mathfrak{C}v$

Bemerkung 83 (Invarianz von $\mathfrak{C}v$) *:*
$\mathfrak{C}v$ ist invariant unter allen affin linearen Abbildungen mit positiver Determinante, insbesondere unter Translation (affiner Verschiebung), Drehstreckung und Scherstreckung mit positivem Streckfaktor. Unter allen affin-linearen Abbildungen mit Determinante ≤ 0 ist $\mathfrak{C}v$ nicht invariant, also insbesondere nicht unter Achsenspiegelungen und Projektionen.

Beweis:
$\mathfrak{C}v$ erbt die Invarianz unter RST-Abbildungen von $\mathfrak{RC}$. Da jede affin lineare Abbildung als Komposition von einer Translaton, die einen gegebenen Punkt a auf 0 abbildet, einer linearen Abbildung und einer weiteren Translation dargestellt werden kann, wobei per Definition die Determinante der komponierten Abbildung gleich der Determinante der linearen Abbildung ist, genügt es zu zeigen, daß jede lineare Abbildung mit positiver Determinante alle Relationen erhält.
Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ und α so eine Abbildung mit Matrix $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, wobei $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ gelte.

Wie oben beschrieben, sind für das Tripel $(0, b, c)$ die Relationen $\{\mathfrak{lx}\}$, $\{\mathfrak{rx}\}$ und die zusammengesetzte Relation $\{\mathfrak{sf}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{sc}, \mathfrak{lx}, \mathfrak{sb}\}$von $\mathfrak{C}v$ durch das Vorzeichen des Orientierungswertes $\Omega := (c_1)(b_2) - (b_1)(c_2) = \det(\, c\ b\,)$ definiert. Eine einfache Rechnung zeigt, daß das Vorzeichen von Ω unter der Abbildung α erhalten bleibt:

$$\Omega^\alpha := \det(\,\alpha(c)\ \alpha(b)\,) = \det(A(\,c\ b\,)) = \det A \cdot \Omega.$$

Das Vorzeichen von Ω (und damit die Relationen $\{\mathfrak{lx}\}$, $\{\mathfrak{rx}\}$) bleiben also erhalten, genau dann, wenn $\det A > 0$.

Die einzelnen Relationen $\{\mathit{sf}\}$ $\{e_{13}\}$, $\{\mathit{sc}\}$, $\{\mathit{lx}\}$ und $\{\mathit{sb}\}$ sind durch das Streckenverhältnis $|b-a|\ :\ |b-c|$ bestimmt. Da affin-lineare Abbildungen Kolinearität und Streckenverhältnisse erhalten, bleiben diese Relationen unter allen affin-linearen Abbildungen erhalten.

Anmerkung:
Daß $\mathfrak{C}v$ nicht invariant unter Achsenspiegelungen ist, liegt daran, daß drei Punkte in Relation $\{\ \mathit{lx}\ \}(a, b : c)$ auf drei Punkte in Relation $\{\ \mathit{rx}\ \}(\alpha(a), \alpha(b) : \alpha(c))$ abgebildet werden, wie obige Rechnung zeigt. (Denn bei Achsenspiegelungen ist det $= -1$.)

$\square$(Bemerkung 83)

Satz 84 (Vollständigkeitseigenschaften von $\mathfrak{C}v$) *:*
$\mathfrak{C}v$ *ist permutations- und kompositionsvollständig.*

Beweis:
Tabelle 4.3 belegt die Permutationsvollständigkeit. Für die Kompositionsvollständigkeit betrachte etwa die Komposition $Rel(a, b, d)\ {}_3\diamond_2\ Rel(a, d, c) = Rel(a, b, c)$.
Sei durch $a^\theta, b^\theta, c^\theta$ eine konsistente Instantiation von $Rel(a, b, c)$ gegeben. Dann existiert $a^{\theta'}, b^{\theta'}, c^{\theta'}, d^{\theta'}$, so daß $Rel(a^{\theta'}, b^{\theta'}, d^{\theta'}) = Rel(a, b, d)$ und $Rel(a^{\theta'}, d^{\theta'}, c^{\theta'}) = Rel(a, d, c)$. Gesucht ist eine Instantiation d^θ des vierten Elements, so daß $Rel(a^\theta, b^\theta, d^\theta) = Rel(a, b, d)$ und $Rel(a^\theta, d^\theta, c^\theta) = Rel(a, d, c)$.
<u>1. Fall:</u>
R_{abc} ist $\{\mathit{lx}\}$ oder $\{\mathit{rx}\}$. (Die drei Punkte bilden ein Dreieck).
Dann gibt es eine affine Abbildung α mit positiver Determinante, die α : $a^{\theta'} \mapsto a^\theta$, $b^{\theta'} \mapsto b^\theta$ und $c^{\theta'} \mapsto c^\theta$ erfüllt. Denn die Eichung η aus Abschnitt 4.1 und ihre Umkehrung sind solche Abbildungen. Deshalb genügt es, für je zwei geeichte Tripel

$$\eta(a^{\theta'}) = (0; 0) \quad \eta(b^{\theta'}) = (1; 0) \quad \eta(c^{\theta'}) = (c_1^{\theta'}, c_2^{\theta'})$$

und

$$\eta(a^{\theta}) = (0; 0) \quad \eta(b^{\theta}) = (1; 0) \quad \eta(c^{\theta'}) = (c_1^{\theta}, c_2^{\theta})$$

eine solche affine Abbildung zu finden. In der Tat definiert $\begin{pmatrix} 1 & \frac{c_1^\theta - c_1^{\theta'}}{c_2^{\theta'}} \\ 0 & \frac{c_2^\theta}{c_2^{\theta'}} \end{pmatrix}$ eine Abbildung mit positiver Determinante, die die entsprechenden Punkte aufeinander abbildet, denn als Realisierungen der gleichen Relation $\{\mathit{rx}\}$ beziehungsweise $\{\mathit{lx}\}$ haben $c_2^{\theta'}$ und c_2^θ das gleiche Vorzeichen. Dann komplettiert $d^\theta := \alpha(d^{\theta'})$ eine Realisierung θvon a, b, c, d, weil $\mathfrak{C}v$ invariant unter affinen

Abbildungen mit positiver Determinante ist
<u>2. Fall:</u>
R_{abc} ist $\{\mathsf{sf}\}$, $\{\mathsf{sc}\}$ oder $\{\mathsf{sb}\}$. (Die drei Punkte liegen kolinear).
Falls $d^{\theta'}$ auf der Linie $a^{\theta'}b^{\theta'}c^{\theta'}$ liegt, so erfüllt jeder Punkt d^{θ}, der bezüglich $a^{\theta}, b^{\theta}, c^{\theta}$ in der gleichen Ordnung auf der Linie $a^{\theta}b^{\theta}c^{\theta}$ liegt wie $d^{\theta'}$ bezüglich $a^{\theta'}, b^{\theta'}, c^{\theta'}$, die gleichen Relationen und ist daher konsistente Erweiterung. Falls $d^{\theta'}$ nicht auf der Linie liegt, steht er mit allen Punkten in Dreiecksrelation und jeder Punkt d^{θ}, der bezüglich $a^{\theta}, b^{\theta}, c^{\theta}$ auf der gleichen Seite auf der Linie $a^{\theta}b^{\theta}c^{\theta}$ liegt wie $d^{\theta'}$ bezüglich $a^{\theta'}, b^{\theta'}, c^{\theta'}$, erfüllt die gleichen Relationen und ist daher konsistente Erweiterung.

$\square$(Satz 84)

Bemerkung 85 ($\mathfrak{C}v$ ist weniger ausdrucksstark als $\mathfrak{RC}$.) *:*
Die in $\mathfrak{RC}$ definierten Relationen $\{\mathsf{lf}\}$, $\{\mathsf{lp}\}$, $\{\mathsf{ll}\}$, $\{\mathsf{ilc}\}$, $\{\mathsf{olc}\}$, $\{\mathsf{elc}\}$, $\{\mathsf{lb}\}$, $\{\mathsf{rf}\}$, $\{\mathsf{rp}\}$, $\{\mathsf{rl}\}$, $\{\mathsf{irc}\}$, $\{\mathsf{orc}\}$, $\{\mathsf{erc}\}$, $\{\mathsf{rb}\}$ können nicht in $\mathfrak{C}v$ (oder $(\mathfrak{L})^{\cup}$) definiert werden.

Beweis:
Die $\mathfrak{RC}$-Relation $\{\mathsf{rp}\}$ ist in $\mathfrak{C}v$ nicht definierbar. Denn angenommen, $\{\ \mathsf{rf}\ \}(a, b : c)$ wäre durch das CSP $\mathcal{C}$ definierbar. Dann gilt also für jede Realisation ρ von $\mathcal{C}$, daß $\{\ \mathsf{rf}\ \}(a^{\rho}, b^{\rho} : c^{\rho})$ realisiert. Sei nun ς eine Scherung mit Scherwinkel $\neq 90$ entlang der Geraden a^{ρ}, b^{ρ}, so wird c^{ρ} so auf einen anderen parallel zu a^{ρ}, b^{ρ} verschobenen Punkt $\varsigma(c^{\rho})$, abgebildet. Die Interpretation σ mit $x^{\sigma} := \varsigma(x^{\rho})$ für alle $x \in \mathcal{C}$ ist ebenfalls eine $\mathfrak{C}v$ -Realisation von $\mathcal{C}$, weil $\mathfrak{C}v$ invariant unter Scherung ist. Aber $\{\ \mathsf{rf}\ \}(a^{\sigma}, b^{\sigma} : c^{\sigma})$ gilt nicht, im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathcal{C}$ die Relation $\{\mathsf{rp}\}$ definiere. Analog gibt es auch für die übrigen angegebenen $\mathfrak{RC}$-Relationen Scherungen, die die Relationen nicht erhalten.

$\square$(Bemerkung 85)

Die geringere Ausdrucksstärke von $\mathfrak{C}v$ zeigt sich auch in folgendem Satz:

Satz 86 (Parallelität ist in $\mathfrak{C}v$ und $\mathfrak{L}$ nicht definierbar.) *:*
Relation Parallel kann zwar in $\mathfrak{RC}$ definiert werden, aber nicht in $\mathfrak{C}v$ (und damit nicht in $\mathfrak{L}$).

Beweis:
Nach Beispiel 6 ist Parallel $\mathfrak{RC}$-definierbar. Angenommen, $Parallel(a, b, c, d)$

wäre durch das CSP C definierbar.

Behauptung:
Die Abbildung $\vartheta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ vermittels $(x,y) \longmapsto (\vartheta_1(x,y), \vartheta_2(x,y)) = (-\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$ hat die folgende Eigenschaft: Sie erhält alle Relationen von $\mathfrak{C}v$, insbesondere bildet sie (Halb-) Geraden auf (Halb-) Geraden ab, und zwar so, daß es paralle Geraden gibt, die auf nicht parallele abgebildet werden.

Beweis der Behauptung: Wie in Abschnitt 4.5 gesehen, sind die Relationen $\{\mathfrak{lx}\}$, $\{\mathfrak{rx}\}$ und die zusammengesetzte Relation $\{\{\mathfrak{sf}, \mathfrak{e}_{23}, \mathfrak{sc}, \mathfrak{e}_{13}, \mathfrak{sb}\}\}$ von $\mathfrak{C}v$ für ein Tripel $(a,b,c) = ((a_1;a_2),(b_1;b_2),(c_1;c_2))$ durch das Vorzeichen des Orientierungswertes $\Omega = (c_1-a_1)(b_2-a_2)-(c_2-a_2)(b_1-a_1)$ definiert. Eine einfache Rechnung zeigt, daß das Vorzeichen von Ω unter der Abbildung ϑ erhalten bleibt:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= (\vartheta_1(c)-\vartheta_1(a))(\vartheta((b_2)-\vartheta_2(a)) - ((\vartheta_2(c)-\vartheta_2(a))\vartheta((b_1)-\vartheta(a_1)) \\
&= (-\tfrac{1}{c_1}-(-\tfrac{1}{a_1}))(\tfrac{b_2}{b_1}-\tfrac{a_2}{a_1}) \ - \ (\tfrac{c_2}{c_1}-\tfrac{a_2}{a_1})(-\tfrac{1}{b_1}-(-\tfrac{1}{a_1}) \\
&= \frac{-a_1b_2+c_1b_2+b_1a_2-\frac{a_2b_1c_1}{a_1}+a_1c_2-c_1a_2-b_1c_2+\frac{a_2b_1c_1}{a_1}}{a_1b_1c_1} \\
&= \tfrac{1}{a_1b_1c_1}\cdot(c_1b_2-a_1b_2-c_1a_2+a_1a_2-b_1c_2+b_1a_2+a_1c_2-a_1a_2) \\
&= \tfrac{1}{a_1b_1c_1}\cdot(c_1-a_1)(b_2-a_2)-(c_2-a_2)(b_1-a_1)
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt, da der Vorfaktor $\frac{1}{a_1b_1c_1}$ positiv ist $(a_1,b_1,c_1 \in \mathbb{R}^+)$.

Die Relationen $\{\mathfrak{lx}\}$ und $\{\mathfrak{e}_{13}\}$ bleiben trivialerweise erhalten. Da die übrigen drei Relationen Permutationen voneinander sind, genügt es, den Erhalt beispielsweise von $\{\mathfrak{sc}\}$ unter ϑ nachzuweisen. Sei nun (a,b,c) ein Tripel mit $\{\mathfrak{sc}\}(a,c:b)$. Dann ist entweder $a_1=b_1=c_1=:x$ und $\frac{b_2-a_2}{b_2-c_2}<0$, und dann ist auch $\vartheta_1(a)=\vartheta_1(b)=\vartheta_1(c)$ und $\frac{\vartheta_2(b)-\vartheta_2(a)}{\vartheta_2(b)-\vartheta_2(c)} = \frac{\frac{b_2}{x}-\frac{a_2}{x}}{\frac{b_2}{x}-\frac{c_2}{x}} = \frac{b_2-a_2}{b_2-c_2} < 0$. Oder es gilt $\frac{b_1-a_1}{b_1-c_1}<0$ und $b_2-a_2=m(b_1-a_1), b_2-c_2=m(b_1-c_1)$, wobei m die Steigung der Gerade durch a,b,c ist. Sei im folgenden $d:=b_1-a_1, e:=b_1-c_1$. Dann ist

$$
\frac{\vartheta_1(b)-\vartheta_1(a)}{\vartheta_1(b)-\vartheta_1(c)} = \frac{-\frac{1}{b_1}-(-\frac{1}{b_1-d})}{-\frac{1}{b_1}-(-\frac{1}{b_1-e})} = \frac{-(b_1-d)+b_1}{-(b_1-e)+b_1} = \frac{d}{e} < 0
$$

und

$$
\vartheta_2(b)-\vartheta_2(a) = -y_0(\vartheta_1(b)-\vartheta_1(a)), \vartheta_2(b)-\vartheta_2(c) = -y_0(\vartheta_1(b)-\vartheta_1(c)),
$$

wobei $y_0 := b_2 - m \cdot b_1$ der vom Punkt b unabhängige y-Achsenabschnitt der Gerade $\ell = (ab)$ ist (d. h. der Wert mit $(0, y_0) \in \ell$). Denn (auch analog für c):

$$\begin{aligned} -y_0(\vartheta_1(b) - \vartheta_1(a)) &= -(b_2 - \tfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot b_1)(-\tfrac{1}{b_1} + \tfrac{1}{a_1}) \\ &= \tfrac{b_2}{b_1} - \tfrac{b_2}{a_1} + \tfrac{(b_2 - a_2) b_1 d}{d a_1 b_1} \\ &= \tfrac{b_2}{b_1} - \tfrac{b_2}{a_1} + \tfrac{b_2}{a_1} - \tfrac{a_2}{a_1} \qquad = \vartheta_2(b) - \vartheta_2(a). \end{aligned}$$

Da verschiedene parallele Geraden verschiedene y-Achsenabschnitte haben, werden sie also auf Geraden mit verschiedener Steigung abgebildet. Die einzigen parallelen Geraden, die unter Aufführung von ϑ parallel bleiben, sind die mit der Gleichung $x_1 = c$ für $c \in \mathbb{R}^+$.
Damit sind alle Teile der Behauptung bewiesen.

□(Satz 86)

Da $\mathcal{C}$ endlich ist, gibt es zu jeder Realisierung ρ eine Verschiebung und möglicherweise Drehung $\varrho \circ \tau$ so daß alle Bildpunkte x^ρ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ liegen und die Bilder von a, b, c, d sich in der zweiten Koordinate unterscheiden. Dann bildet die Abbildung $\vartheta \circ \varrho \circ \tau$ die Realisierung ρ von $\mathcal{C}$ auf eine andere ab, bei der die Parallelität von a, b, c, d nicht erhalten bleibt - im Widerspruch zur Annahme.

4.5.2 Der geordnete Linien-Kalkül $\mathfrak{L}$:

$\mathfrak{C}v$ kann weiter vergröbert werden, indem die zwei Relationen $\{\mathtt{rx}\}$ und $\{\mathtt{lx}\}$ zu einer neuen Relation $\{\mathtt{tr}\}$ = (echtes) Dreieck zusammengefaßt werden.

Bemerkung 87 (Reflexionsinvarianz von $\mathfrak{L}$) *:*
$\mathfrak{L}$ ist invariant unter allen affin-linearen Abbildungen mit Determinante $\neq 0$, insbesondere unter Achsenspiegelung.

Der Beweis ist analog zum Beweis von Bemerkung 83, wobei $det > 0$ durch $det \neq 0$ ersetzt wird. **Anmerkung:**
$\mathfrak{L}$ ist weniger ausdrucksmächtig als $\mathfrak{C}v$, weil die $\mathfrak{C}v$ -Relationen $\{\mathtt{lx}\}$ und $\{\mathtt{rx}\}$ nicht $\mathfrak{L}$-definierbar sind.

Beweis:
Angenommen, es gibt eine Expansion E von $\{\ \mathtt{rx}\ \}(a, b : c)$. Jedes Modell θ, das E realisiert, kann durch Achsenspiegelung an Linie $\ell(a, b)$ auf ein Modell θabgebildet werden, das auch E realisiert, aber in diesem Modell gilt nicht $\{\ \mathtt{rx}\ \}(a, b : c')$, sondern $\{\ \mathtt{lx}\ \}(a, b : c')$ Das ist ein Widerspruch zur Annahme θrealisiere E genau dann, wenn $\{\ \mathtt{rx}\ \}(a, b : c')$.

□(Bemerkung 87)

Korollar 88 (Vollständigkeitseigenschaften von $\mathfrak{L}$) *:*
$\mathfrak{L}$ ist permuations- und kompositionsvollständig.

Der Beweis ist praktisch identisch mit dem Beweis von Satz 84. (Statt „ $\{\mathtt{rx}\}$ oder $\{\mathtt{lx}\}$“ schreibe „ $\{\mathtt{tr}\}$“).

4.5.3 Winkelkalküle

Eine naheliegende Variation von $\mathfrak{DC}$ bzw. $\mathfrak{RC}$ besteht darin, nicht den 90^o-Winkel festzulegen, sondern einen beliebigen anderen. Dies führt zur Definition der Winkelkalküle:

Definition 89 (Winkelrelationen, Winkelkalküle) *:*

1. Die Relationen

$\measuredangle\alpha\mathfrak{l} :=$	$\{(r\cos\alpha; r\sin\alpha) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$	*(**angle** α **at location**),*
$\measuredangle\alpha := \measuredangle\alpha\mathfrak{p} :=$	$\{(1 - r\cos\alpha; -r\sin\alpha) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$	*(**angle** α **at pivot element**)*
und $\measuredangle\alpha\mathfrak{c}$		*(**circular angle** α),*

mit der Semantik

$$\begin{array}{llll}
\textit{angle } \alpha \textit{ (at pivot element)} & \measuredangle\alpha^{\mathfrak{K}_{\alpha^o}}(a,b:c) & \Longleftrightarrow & \measuredangle abc = \alpha \\
\textit{angle } \alpha \textit{ at location:} & \measuredangle\alpha\mathfrak{l}^{\mathfrak{K}_{\alpha^o}}(a,b:c) & \Longleftrightarrow & \measuredangle bac = \alpha \\
\textit{circular angle } \alpha\textit{:} & \measuredangle\alpha\mathfrak{c}^{\mathfrak{K}_{\alpha^o}}(a,b:c) & \Longleftrightarrow & \measuredangle bca = \alpha
\end{array}$$

heißen Winkelrelationen.

2. Die Relationen

$$\begin{array}{ll}
\measuredangle\,]\alpha,\beta[\,_{(s;t)} & := \{s + (r\cos\gamma; t + r\sin\gamma) \mid r \in \mathbb{R}^+\}, \gamma \in\ ]\alpha,\beta[\ \} \\
\measuredangle\,]\alpha,\beta]\,_{(s;t)} & := \{s + (r\cos\gamma; t + r\sin\gamma) \mid r \in \mathbb{R}^+, \gamma \in\ ]\alpha,\beta]\ \} \\
\measuredangle\,[\alpha,\beta[\,_{(s;t)} & := \{s + (r\cos\gamma; t + r\sin\gamma) \mid r \in \mathbb{R}^+, \gamma \in\ [\alpha,\beta[\ \} \\
\measuredangle\,[\alpha,\beta]\,_{(s;t)} & := \{s + (r\cos\gamma; t + r, \sin\gamma) \mid r \in \mathbb{R}^+, \gamma \in\ [\alpha,\beta]\ \}
\end{array}$$

heißen Winkelsegmente (vgl. Abbildung 4.2).

*3. Ein Kalkül, das für ein $\alpha \notin \{0, 180\}$ die Relation $\{\measuredangle\alpha\}$ oder $\{\measuredangle\alpha l\}$ enthält, heißt **Winkelkalkül** . Insbesondere gehören dazu die $\mathfrak{C}v$ -Verfeinerungen $\mathfrak{K}_{\alpha^o}$,*

die entstehen, indem
$\{\mathfrak{lx}\}$ *in die drei Relationen* $\measuredangle\,]0,\alpha[\,_{(0;0)}$, $\measuredangle\alpha\mathfrak{l} = \,]\alpha,\alpha[\,_{(0;0)}$ *und* $\measuredangle\,]\alpha,180[\,_{(0;0)}$ *partitioniert wird, und entsprechend* $\{\mathfrak{rx}\}$ *in die drei Relationen* $\measuredangle\,]-180,(-\alpha)[\,_{(0;0)}$, $\measuredangle(-\alpha)\mathfrak{l} := \,[(-\alpha),(-\alpha)]\,_{(0;0)}$ *und* $\measuredangle\,](-\alpha),0[\,_{(0;0)}$.
Außerdem enthält $\mathfrak{K}_{\alpha}^{o}$ *die für* α *und* $(-\alpha)$ *die jeweils 9 in Tabelle 4.4 zusammengestellten Permutationen, zusammen mit den 7 unverfeinerten Relationen* $\mathfrak{eq}$, $\mathfrak{sf}$, $\mathfrak{e}_{23}$, $\mathfrak{sc}$, $\mathfrak{e}_{13}$, $\mathfrak{sb}$, $\mathfrak{e}_{12}$ *also insgesamt 25 Basisrelationen.*

Transformation:	INV	REV	CONV	ROT	TOR
ID: $(x,y:z)$	$(y,x:z)$	$(z,y:x)$	$(x,z:y)$	$(y,z:x)$	$(z,x:y)$
$]0,\alpha[\ \mathfrak{p}$	$]0,\alpha[\ \mathfrak{l}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{p}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{c}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{l}$	$]0,\alpha[\ \mathfrak{c}$
$]0,\alpha[\ \mathfrak{l}$	$]0,\alpha[\ \mathfrak{p}$	$]0,\alpha[\ \mathfrak{c}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{l}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{c}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{p}$
$]0,\alpha[\ \mathfrak{c}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{c}$	$]0,\alpha[\ \mathfrak{l}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{p}$	$]0,\alpha[\ \mathfrak{p}$	$]-\alpha,0[\ \mathfrak{l}$
$\alpha\mathfrak{p}$	$\alpha\mathfrak{l}$	$-\alpha\mathfrak{p}$	$-\alpha\mathfrak{c}$	$-\alpha\mathfrak{l}$	$\alpha\mathfrak{c}$
$\alpha\mathfrak{l}$	$\alpha\mathfrak{p}$	$\alpha\mathfrak{c}$	$-\alpha\mathfrak{l}$	$-\alpha\mathfrak{c}$	$-\alpha\mathfrak{p}$
$\alpha\mathfrak{c}$	$-\alpha\mathfrak{c}$	$\alpha\mathfrak{l}$	$-\alpha\mathfrak{p}$	$\alpha\mathfrak{p}$	$-\alpha\mathfrak{l}$
$]\alpha,180[\ \mathfrak{p}$	$]\alpha,180[\ \mathfrak{l}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{p}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{c}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{l}$	$]\alpha,180[\ \mathfrak{c}$
$]\alpha,180[\ \mathfrak{l}$	$]\alpha,180[\ \mathfrak{p}$	$]\alpha,180[\ \mathfrak{c}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{l}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{c}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{p}$
$]\alpha,180[\ \mathfrak{c}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{c}$	$]\alpha,180[\ \mathfrak{l}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{p}$	$]\alpha,180[\ \mathfrak{p}$	$]-180,-\alpha[\ \mathfrak{l}$

Tabelle 4.4: Die Transformationen von $\mathfrak{K}_{\alpha}^{o}$ für einen Winkel $\alpha^o < 180^o$. Außerdem enthält $\mathfrak{K}_{\alpha}^{o}$ auch die Relationen mit dem jeweils negierten Wert $-\alpha$.

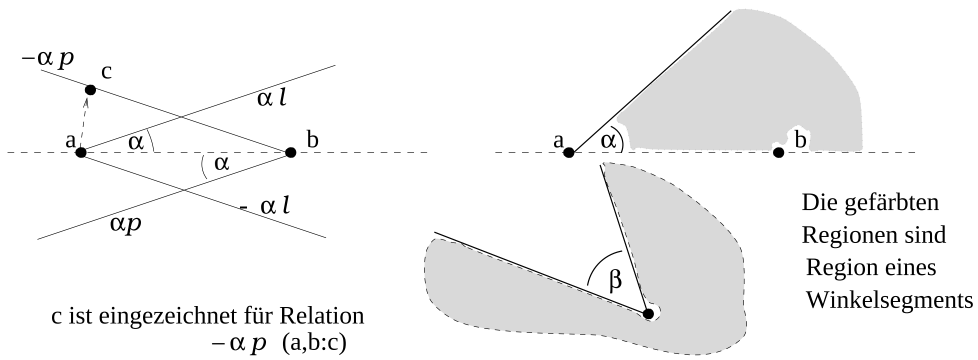


Abbildung 4.2: Die Winkelrelationen der Winkelkalküle

Wie man anhand von Tabelle 4.4.sieht, sind ist $\mathfrak{K}_{\alpha}^{o}$ permutationsvollständig, weil zu das Ergebnis jeder Transformationsoperation genau eine Relation von $\mathfrak{K}_{\alpha}^{o}$ ist. [7] $\mathfrak{K}_{\alpha}^{o}$ ist nicht JEPD-Kalkül, denn beispielsweise $\measuredangle(-\alpha)\mathfrak{p} \cap \measuredangle\alpha\mathfrak{l} \neq \emptyset$.

Beispiel:
$\mathfrak{SC}$, $\mathfrak{DC}$ und $\mathfrak{RC}$ sind Winkelkalküle mit $\alpha = 90^o$, und $\mathfrak{RC} = \mathrm{JEPD}(\mathfrak{K}_{90}^{o})$.

[7] Für die unverfeinerten Relationen vererbt sich diese Eigenschaft trivialerweise von $\mathfrak{C}v$.

Damit habe ich alle für diese Arbeit benötigten Kalküle definiert. In der partiellen Ordnung der Verfeinerungen gilt:

$$\mathfrak{E}q \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{SC} \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{DC} \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{RC}$$

und

$$\mathfrak{E}q \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{L} \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{C}v \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{K}_{\alpha}^{o} \overset{\neq}{\in\!\!\equiv} \mathfrak{F}$$

Bis auf die letze Verfeinerung (zu $\mathfrak{F}$) sind alle endlich.

Kapitel 5

TCI-Abschluss und Endlichkeit

Ich habe nun einige RST-Relationenalgebren vorgestellt. Allen gemeinsam ist, daß sie sich von dem Einzelkreuzkalkül SC ableiten, in dem rechte Winkel ausgezeichnet sind. Viele sind Verfeinerungen desselben. Ein wesentlicher Mangel sowohl von $\mathfrak{SC}$ als auch seinen Verfeinerungen $\mathfrak{DC}$ und $\mathfrak{RC}$ besteht darin, dass die Folgerungen, die in ihnen gezogen werden können, nicht informationserhaltend sind. Dies liegt daran, dass sie nicht vollständig sind bezüglich aller der Operationen, die für Folgerungen verwendet werden: Transformationen, Schnitt und Kompositionen.
Als informationserhaltende Alternative habe ich das konvexe Kalkül Cv mit Kalkülmodell $\mathfrak{C}v$ vorgeschlagen. Allerdings ist es wenig ausdrucksstark. Gibt es ein aussdrucksstärkeres Kalkül, das ebenso informationserhaltend ist unter den Folgerungen, die durch Schnitt, Permutation und Komposition gewonnen werden? Ein Ansatz, um ein solches zu finden, besteht darin, das Kalkül zu verfeinern, so daß es alle erforderlichen Abschlusseigenschaften besitzt, so wie wir aus dem Einzelkreuzkalkül $\mathfrak{SC}$ durch Abschluß unter Permutationen und Schnitt das Doppelkreuzkalkül $\mathfrak{DC}$ und aus diesem schießlich das verfeinerte Doppelkreuzkalkül abgeleitet haben. Dies führt man so lange durch, bis das Kalkül schnitt-, permutations- und kompositionsvollständig ist.

5.1 Definitionen

Definition 90 (TCI-Abschluß $\mathfrak{K}^{TCI}$) *:*
Der TCI Abschluß $\mathfrak{K}^{TCI}$ eines Kalküls $\mathfrak{K}$ ist die kleinste permutationsvollständige, kompositionsvollständige und unter Schnitt abgeschlossene Verfeinerung von $\mathfrak{K}$.

Nach Satz 48 (Abschnitt 2.6) und der Bemerkung 49 existiert der TCI-Abschluß zu jedem Kalkül $\mathfrak{K}$ und hat die Abschlußeigenschaften.

Diese Definition und die Betrachtungen, was man über die Relationen des TCI-Abschlusses sagen kann, werden sich als sehr fruchtbar erweisen. Die wesentliche Aussage dieses Kapitels ist, dass für die wegzusammenhängenden RST-Relationenalgebren, die ja den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden, tatsächlich alle informationserhaltenden Relationenalgebren, die ausdrucksstärker als $\mathfrak{C}v$ sind, unendlich sind.
Mehr noch, ich kann zeigen, daß für eine große Klasse von informationserhaltenden RST-Relationenalgebren, nämlich die Winkelkalküle, die TCI-Abschlüsse tatsächlich gleich sind, und daraus folgern, daß schon ihr erweitertes Basiskalkül gleichermaßen sehr ausdrucksstark ist. Es zeigt sich somit, daß ein großer Abstand besteht zwischen $\mathfrak{C}v$ und feineren RST-Relationenalgebren. Der Grund für diese Ausdrucksstärke liegt allein darin begründet, daß ein in den naheliegenden Verfeinerungen von $\mathfrak{C}v$ ein Winkel $< 180^o$ ausgezeichnet wird.

Statt mit $\mathfrak{RC}$ böte sich $(\mathfrak{RC}^{TCI})^{\cup}$ als Kalkül zur rst-Beschreibung räumlicher Konstellationen an. Ableitungen neuer $(\mathfrak{RC}^{TCI})^{\cup}$-Relationen aus alten in einer gegebenen Instanz eines CSP C mittels Transformationsoperationen, Schnitt und Komposition wären dann informationserhaltend. Sie lassen sich durch ein Programm berechnen, wenn die Anzahl der auftretenden Relationen (und damit der zu definierenden Argumente-Werte-Paare für Kompositionen, Transformationsoperationen und Schnittoperationen) endlich ist. Die aufgestellten Erwartungen an ein Kalkül werden durch folgende Definitionen zusammengefaßt:

Definition 91 (verwendbar, anschaulich, symmetrisch) *:*
*Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt **verwendbar** , falls es permutations-, kompositions- und schnittvollständig und eine endliche JEPD-Basis besitzt, also, wenn gilt:*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{TCI}, \top = \bigcup \mathcal{B}(\mathfrak{K}) \text{ und } |\mathcal{B}(\mathfrak{K})| < \infty.$$

*Ein RST-Kalkül heißt **anschaulich** , falls die Regionen der repräsentierbaren Basisrelationen und deren Komplemente in $\mathbb{C}$ alle wegzusammenhängend sind.*
*Er heißt **symmetrisch** , falls es zu jeder repräsentierbaren Relation R eine zugehörige Relation mit $Reg(\bar{\mathsf{R}}) = \{\bar{z} \in \mathbb{C} | \; z \in Reg(R)\}$ gibt, die bezüglich der Referenzgeraden symmmetrisch liegt.*

Beispiel 16 ($\mathfrak{RC}$ und $\mathfrak{C}v$) *:*
1. $\mathfrak{SC}$, $\mathfrak{DC}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{RC}$ sind nicht verwendbar

2. Alle bisher vorgestellten Kalküle außer $\mathfrak{L}$ sind anschaulich
3. Alle bisher vorgestellten Kalküle sind symmetrisch.

Beweis:
1. $\mathfrak{SC}$ und $\mathfrak{DC}$ sind nicht permutationsvollständig. $\mathfrak{F}$ hat keine endliche Basis, da jede Punktrelation Basisrelation ist. $\mathfrak{RC}$ ist nicht kompositionsvollständig.
2. In jedem bisher dieser Kalküle ist jede Basisrelation wegzusammenhängend (insbesondere jede Punktrelation $\{\ \mathsf{z}\ \}$ ist wegzusammenhängend durch den trivialen Weg $v : t \mapsto z$, für alle t).
3. Die Basisrelationen $\{\mathsf{tr}\ \}$, $\{\mathsf{e}_{\kappa\lambda}\ \}$ und $\{\ \mathsf{s?}\ \}$ sind zu sich selbst symmetrisch ("?" steht für einen der möglichen zweiten Buchstaben "b", "c", "f"), und die Basisrelationen $\{\ (\mathsf{?})\mathsf{l?}\ \}$ und $\{\ (\mathsf{?})\mathsf{r?}\ \}$ sind zueinander paarweise symmetrisch. Jede zusammengesetzte Relation $\mathsf{R} = \bigcup_{i\in I} \mathsf{B}_i$ ist symmetrisch zu $\bar{\mathsf{R}} = \bigcup_{i\in I} \bar{\mathsf{B}}_i$.

□(Beispiel 16)

Da nun $\mathfrak{RC}$ nicht verwendbar ist, besteht noch die Hoffnung, durch Verfeinerung eine verwendbare Relationenalgebra zu erzeugen. Die Frage ist dabei, wie groß $\mathfrak{RC}^{\ TCI}$ ist.
Leider zeigt sich, daß die Verfeinerung $\mathfrak{RC}^{\ TCI}$ unendlich viele Relationen hat, daher auch nicht durch eine endliche JEPD-Basis beschreibbar ist und folglich die naheliegende Übertragung von Kalkülen, die endlich oft Schnitte, Permutationen und Kompositionen anwenden, nicht möglich ist. Dies liegt im wesentlichen daran, daß $\mathfrak{RC}$ die folgende Eigenschaft hat:

Definition 92 (beschränkte RST-Relationenalgebra) *:*
Eine Relationenalgebra heißt ***beschränkt*** *, falls sie eine repräsentierbare Relation* R *enthält, die durch eine beschränkte Menge, die nicht* $\{0\}$ *oder* $\{1\}$ *ist, (komplex) repräsentiert wird. Die entsprechende Relation heißt beschränkte Relation.*

Beispiel 17 ($\mathfrak{RC}$-Relationen) *:*
Die $\mathfrak{RC}$*-Relationen* $\{\mathsf{olc}, \mathsf{ilc}, \mathsf{sc}, \mathsf{irc}, \mathsf{orc}\ \}$ *sind beschränkt. Die* $\mathfrak{RC}$*-Relationen* $\mathsf{e}_{12}, \mathsf{eq}, \mathsf{e}_{13}, \mathsf{e}_{23}$ *sind nicht beschränkt, denn sie sind nicht repräsentierbar oder durch* $\{0\}$ *oder* $\{1\}$ *repräsentiert.*
Alle anderen $\mathfrak{RC}$*-Basisrelationen* B *sind unbeschränkt, da die für sie Reg*(B) *unbeschränkt ist.*

Bemerkung 93 (Komposition und Inverse) *:*
1. Die Inverse transformierte $\mathsf{R}^{(12)}$ *einer beschränkten Relationen* R *ist beschränkt.*
2. Wenn R_1 *und* R_2 *beschränkt sind, ist die unter der Komposition* $\mathsf{R}_1\ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2$ *resultierende Relation* R *auch beschränkt, oder Reg*$(\mathsf{R}) = \{1\}$

Beweis:
1.Die Behauptung folgt direkt aus dem Kompositionssatz 81 und dem Transformationssatz (Satz 78). Denn sei $z \in Reg\ \mathsf{R}$, so ist $1–z \in Reg(\mathsf{R}^{(12)})$. Sei S die Schranke für $Reg\ \mathsf{R}^{(12)}$, also $|1-z| < s$ für alle $z \in Reg \mathsf{R}$, so ist $S+1$ Schranke für $|z|$. Die Ausnahmen $\{0\}, \{1\}$ können dabei nicht als resultierende Relation beschränkter Relationen auftreten, denn $Reg \mathsf{R}^{(12)} = \{1\}$ oder $Reg \mathsf{R}^{(12)} = \{0\} \Leftrightarrow Reg \mathsf{R} = \{1\}$ oder $Reg \mathsf{R} = \{0\}$.
2. $Reg \mathsf{R}_i \neq \{0\} \Rightarrow \exists z_i \neq 0 : \ z_i \in R_i \Rightarrow z := z_1 \cdot z_2 \in R, z \neq 0$. Also $Reg \mathsf{R} \neq \{0\}$. Nach dem Kompositionssatz (Satz 81) gilt: Sei S_i Schranke für $Reg \mathsf{R}_i$, so ist $S_1 \cdot S_2$ Schranke für die Komposition, denn $z \in Reg(\mathsf{R}_1\ {}_3{\diamond}_2\ \mathsf{R}_2)$, genau dann, wenn $z = z_1 \cdot z_2$ mit $z_i \in S_i$. Also $|z| \leq S_1 \cdot S_2$.

$\square$(Bemerkung 93)

5.2 (Un-)Endlichkeit von $\mathfrak{K}^{TCI}$

Satz 94 (0-1-Satz) *:*
Sei $\mathfrak{K}$ eine endliche permutations- und kompositionsvollständige RST-Relationenalgebra. Dann gilt:

1. *Für jede Relation R mit Reg $\mathsf{R} \not\subseteq \{\mathfrak{eq}, \mathfrak{e}_{12}, \mathfrak{sb}, \mathfrak{e}_{12}, \mathfrak{e}_{13}\}$ in $\mathfrak{K}$ gilt:* $1 \in \partial \mathsf{R}$
2. *Wenn R beschränkt ist, dann Reg* $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{R}^+$
3. *Wenn R beschränkt ist, dann* $0 \in \partial(Reg \mathsf{R})$

Das bedeutet, daß jede Relation $\mathsf{R} \not\subseteq \{\mathfrak{eq}, \mathfrak{e}_{12}, \mathfrak{sb}, \mathfrak{e}_{12}, \mathfrak{e}_{13}\}$ (insbesondere jede reguläre Relation) Punkte enthält, die beliebig nahe beim Referenzpunkt liegen und entweder Punkte beliebig weit draußen oder Punkte beliebig nahe beim Startpunkt.

Beweis:
Sei zunächst R beschränkt, sei $S = \limsup_{z \in Reg \mathsf{R}} |z|$ die kleinste Schranke.
Behauptung: S=1.
Beweis der Behauptung: Nach dem Kompositionssatz (Satz 81) gilt, daß

$$Reg(\mathsf{R}^k) := Reg(\mathsf{R}\ {}_3{\diamond}_2\ \mathsf{R} \ldots\ {}_3{\diamond}_2\ \mathsf{R}) = \{z \mid \exists z_1, \ldots, z_k \in Reg \mathsf{R} : z = z_1 z_2 \ldots z_k\}.$$

Wegen der Stetigkeit und Monotonie der Multiplikation gilt

$$\limsup_{z \in Reg(\mathsf{R}^k)} |z| = S^k$$

Falls $S \neq 1$, so wären also die unendlich vielen Relationen $(\mathsf{R}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise verschieden, aber alle wären wegen der Kompositionsvollständigkeit in $\mathfrak{K}$. Also

$S = 1$.
Angenommen, $|z| = r(cos\phi + \imath\, sin\phi)$ $(\phi \neq 0)$ sei in R enthalten. Also enthält R^k einen Punkt $r^k(\cos(k\phi) + \imath\, \sin(k\phi))$. Also enthält die beschränkte Relation R^k einen Punkt mit negativem Realteil. Dann aber enthält die beschränkte Relation $(\text{Reg } \mathsf{R}^k)^{(12)}$ einen Punkt z mit $|z| \geq \Re(z) > 1$ im Widerspruch zum soeben festgestellten. Damit ist 2. bewiesen. (Vgl. Abbildung 5.1)

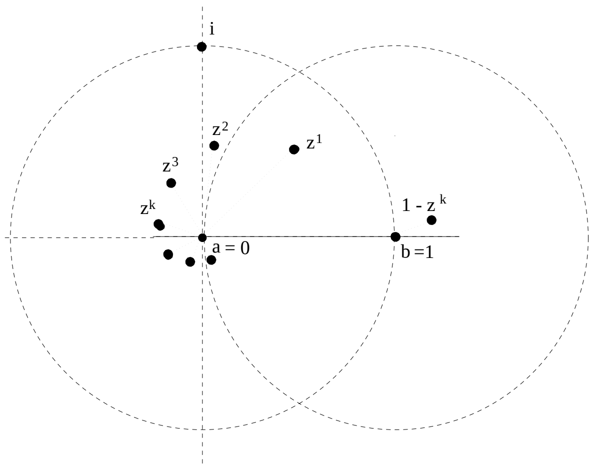


Abbildung 5.1: Skizze zum Beweis des 0-1-Satzes 94. Für ein hinreichend großes k ist $1 - z^k \in (Reg\mathsf{R}^k)^{(12)}$ und $|1 - z^k| > 1$

Auch den Beweis für 3. führe ich indirekt. Angenommen, $0 \notin \partial\mathsf{R}$. Dann ist $\mathsf{R}^{(23)}$ beschränkt, denn nach dem Transformationssatz (Satz 78) gilt $Reg(\mathsf{R}^{(23)}) = \{z \mid \frac{1}{z} \in Reg\mathsf{R}\}$ Da auch $\mathsf{R}^{(23)}$ in $\mathfrak{K}$, gilt

$$\limsup_{z \in Reg\mathsf{R}^{(23)}} |z| = 1, \text{ also } \liminf_{z \in Reg\mathsf{R}} |z| = 1.$$

Also gilt für alle $z \in Reg\mathsf{R} : |z| = 1$, also nach 2. $\mathsf{R} = \{1\}$, aber $\{ 1 \}$ ist nach Definition nicht beschränkt. Damit war die Annahme falsch, also gilt 3.
Zu 1.: Vorerst sei R beschränkt. Angenommen, $1 \notin \partial\mathsf{R}$. Dann ist $0 \notin \partial\mathsf{R}^{(12)}$. Nach der Bemerkung **??** über die inverse Relation ist auch $\mathsf{R}^{(12)}$ beschränkt. Nach 3. gilt dann: $0 \in \partial\mathsf{R}^{(12)}$. Ein Widerspruch. Also gilt für beschränkte Relationen: $1 \in \partial\mathsf{R}$.
Es genügt, die Aussage $1 \in \partial(Reg\mathsf{R} \setminus \{1\})$ nachzuweisen. Sei $\mathsf{R}(1 \notin Reg\mathsf{R}$ eine beliebige der Voraussetzung genügende Relation. Angenommen, $1 \notin \partial Reg\mathsf{R}$. Dann ist $0 \notin \partial Reg\ \mathsf{R}^{(12)}$. Folglich ist aber nach dem Transformationssatz (Satz 78) $(\text{Reg } \mathsf{R}^{(12)})^{(23)}$ beschränkt, denn $(\mathsf{R}^{(12)})^{(23)}$ wird durch eine beschränkte Region (komplex) repräsentiert. Nach 2. und 3. ist $(\text{Reg } \mathsf{R}^{(12)})^{(23)} \subseteq [0, 1]$. Daher ist $\text{Reg } \mathsf{R}^{(12)} \subseteq [1, \infty]$ und $Reg\mathsf{R}^{(12)} \subseteq [-\infty, 0]$, was der Voraussetzung für R widerspricht.

□(Satz 94)

Korollar 95 (Unendlichkeit von $\mathfrak{RC}^{\ TC}$ und $\mathfrak{RC}^{\ TCI}$) *:*
$\mathfrak{RC}^{\ TCI}$ und $\mathfrak{RC}^{\ TC}$ sind unendlich

Beweis:
olc ist eine beschränkte Relation, die nicht Teilmenge des Intervalls $[0,1]$ ist. Da $\mathfrak{RC}^{\ TCI}$ und $\mathfrak{RC}^{\ TC}$ nach Definition permutations- und kompositionsvollständig sind, sind sie unendlich.

□(Korollar 95)

Damit gibt es keine verwendbare Verfeinerung von $\mathfrak{RC}$, da keine Verfeinerung, die permutations- und kompositionsvollständig ist, durch eine endliche JEPD-Basis beschreibbar wäre.

Gibt es denn wenigstens eine endliche Vergröberung, die permutations- und kompositionsvollständig ist? Wie wir wissen, ist $\mathfrak{C}v$ eine solche. Jedoch ist $\mathfrak{C}v$ nicht besonders ausdrucksstark. In $\mathfrak{C}v$ lassen sich die Eigenschaft, daß zwei Linien parallel sind, und damit die Eigenschaft, daß zwei Längen gleich sind, nicht definieren.
Das folgende Theorem sagt jedoch aus, daß zumindest jede anschauliche verwendbare Verfeinerung von $\mathfrak{C}v$ schon $\mathfrak{C}v$ selbst ist.

Theorem 96 ($\mathfrak{C}v$ ist feinstes verwendbares anschauliches Kalkül) *:*
Jede anschauliche, verwendbare Verfeinerung $\mathfrak{K} \Supset (\mathfrak{C}v)^{\cup}$ mit $\mathfrak{K}^{\ TCI} = \mathfrak{K}$ ist $(\mathfrak{C}v)^{\cup}$ selbst.

Beweis:
Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Erkenntnis, daß verwendbare RST-Relationenalgebren nur Relationen beinhalten, die den Eigenschaften des 0-1-Satzes 94 genügen. Für den Rest dieses Abschnitts bezeichne $\mathfrak{K}$ immer eine verwendbare Relationenalgebra.
Eine direkte Folge des 0-1-Satzes 94 ist das folgende Lemma.

Lemma 97 (zusammenhängende beschränkte Relationen) *:*
Sei $\mathfrak{K}$ eine verwendbare RST-Relationenalgebra. Jede zusammenhängende beschränkte Relation in $\mathfrak{K}$ ist ein ganzes Intervall von 0 bis 1.

Beweis:
Sei R eine zusammenhängnde, beschränkte Relation in $\mathfrak{K}$. Nach dem 0-1-Satz 94 ist jede beschränkte Relation $= \{\ 1\ \}$ oder sie ist Teilmenge des Intervalls von 0 bis 1. Gäbe es aber einen Punkt $x \in\ ]0,1[$, der nicht in ihr ist, wäre

$$\limsup_{z \in Reg \mathsf{R}} |z| = x \text{ oder } \liminf_{z \in Reg \mathsf{R}} |z| = x$$

$$\text{und damit } \limsup_{z \in Reg \mathsf{R}^{(12)}} |z| = 1 - x,$$

was nach dem 0-1-Satz 94 nicht sein kann, oder es gäbe $x^- < x,\ x^+ > x \in R$, dann aber wäre R nicht zusammenhängend. Also ist jeder Punkt $x \in\ ]0,1[$ in R enthalten.

$\square$(Lemma 97)

Das Lemma bedeutet, daß weder $\{\mathit{sc}\}$ noch die entsprechenden transformierten Relationen $\{\mathit{s}\mathfrak{d}\}$ und $\{\mathit{s}\mathfrak{f}\}$ echt verfeinert werden können, denn sonst gäbe es eine entsprechende transformierte Relation, die beschränkt, aber echte Teilmenge des Intervalls $]0,1[$ ist. $\{e_{23}\}$, $\{e_{12}\}$ und $\{e_{13}\}$ können als Punktrelationen nicht weiter verfeinert werden, ebensowenig $\{eq\}$. Daher bleibt nur zu untersuchen, wie Verfeinerungen von $\{\mathit{lx}\}$ oder $\{\mathit{rx}\}$ aussehen können.

In verwendbaren Relationenalgebren $\mathfrak{K}$ gilt für alle Basisrelationen B, daß

$$\begin{array}{rll} & \mathsf{B} \cap \mathsf{B}^{(231)} \cap \mathsf{B}^{(321)} & = \emptyset \\ \textit{oder} & \mathsf{B} \cap \mathsf{B}^{(231)} \cap \mathsf{B}^{(321)} & = \mathsf{B}. \end{array}$$

denn andernfalls wäre B im Widerspruch zu Bemerkung 20 (Abschnitt 2.1) kein Atom, da der Schnitt wieder eine Relation ist. Die Basisrelationen, für die die zweite Bedingung gilt, nenne ich ***rotationssymmetrisch*** , denn sie bleiben unter den Rotationstransformationen ROT und TOR erhalten, da in permutationsvollständigen Relationenalgebren die transformierten Relationen $\mathsf{B}^{(231)}$ und $\mathsf{B}^{(321)}$ wieder Basisrelation sind, und daher keine echte Obermenge sein können.

Betrachten wir nun folgende Möbiustransformation μ, die die Halbebene $Reg\{\mathit{lx}\} = \{z \mid \Im(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe im komplexen stetig abbildet:

$$\mu(z) := \tfrac{z-w}{z-\bar{w}} \quad \text{, wobei } w = \sqrt[3]{-1} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\imath$$

Dabei gilt:

$$\mu(0) = w^2, \quad \mu(1) = w^4, \quad \mu(\infty) = 1, \quad \mu(w) = 0$$

Behauptung:
Die Transformation ist gerade so gewählt, daß

$$\mu(Reg\mathsf{R}^{(231)}) = w^2 \cdot \mu(Reg\mathsf{R}), \quad \mu(Reg\mathsf{R}^{(321)}) = w^4 \cdot \mu(Reg\mathsf{R}),$$

und damit liegen die Bilder der rotationssymmetrischen Basisrelationen drehsymmetrisch mit Drehwinkel 120^oum den Punkt $\mu(w) = 0$.

Beweis der Behauptung:
Für w gelten gerade die Beziehungen

$$w^3 = -1, \;\; w^6 = 1, \;\; w^5 = \bar{w}, \;\; \bar{w}w = 1 = \bar{w} + w$$

und damit

$$\begin{array}{lcccccccccc} \frac{\frac{1}{1-z}-w}{\frac{1}{1-z}-\bar{w}} & = & \frac{1-w+wz}{1-\bar{w}+\bar{w}z} & = & \frac{\bar{w}+wz}{w+\bar{w}z} & = & \frac{1+w^2z}{w^2+z} & = & w^2(\frac{z-w}{z-\bar{w}}) & & \\ \text{und } \frac{1-\frac{1}{z}-w}{1-\frac{1}{z}-\bar{w}} & = & \frac{z-1-wz}{z-1-\bar{w}z} & = & \frac{(1-w)z-1}{1-\bar{w}z-1} & = & \frac{\bar{w}z-1}{wz-1} & = & \frac{w^5z-w^6}{wz-w\bar{w}} & = & w^4(\frac{z-w}{z-\bar{w}}) \end{array}$$

Die Behauptung folgt nun mit dem Transformationssatz:

$$\begin{array}{rcccc} z \in Reg\mathsf{R} & \Longleftrightarrow & 1-\frac{1}{z} \in Reg\mathsf{R}^{(321)} & \Longleftrightarrow & \frac{1}{1-z} \in Reg\mathsf{R}^{(231)} \\ \Rightarrow \frac{z-w}{z-\bar{w}} \in \mu(Reg\mathsf{R}) & \Longleftrightarrow & \frac{\frac{1}{1-z}-w}{\frac{1}{1-z}-\bar{w}} \in \mu(Reg\mathsf{R}^{(231)}) & \Longleftrightarrow & w^2(\frac{z-w}{z-\bar{w}}) \in \mu(Reg\mathsf{R}^{(231)}), \\ \frac{z-w}{z-\bar{w}} \in \mu(Reg\mathsf{R}) & \Longleftrightarrow & \frac{1-\frac{1}{z}-w}{1-\frac{1}{z}-\bar{w}} \in \mu(Reg\mathsf{R}^{(321)}) & \Longleftrightarrow & w^4(\frac{z-w}{z-\bar{w}}) \in \mu(Reg\mathsf{R}^{(321)}) \end{array}$$

Zunächst rufe ich eine Folgerung aus dem Jordanschen Kurvensatz [tD91] in Erinnerung, die Jan-Christoph Puchta und ich uns einmal überlegt haben[Puc]:

Lemma 98 *Sei v ein stetiger geschlossener Weg in $\mathbb{C}\setminus\{\infty\}$, der einen Punkt w nicht enthält, aber um w mindestens einmal herum geht. Dann ist die Menge der Punkte, die von w aus durch Wege erreichbar sind, die v nicht kreuzen, beschränkt.*

Beweis:
Da v kompakt ist, nimmt der Abstand von $Spur\ v$ zu w sein Minimum m und Maximum M an, und daher liegt $Spur\ v$ ganz in dem abgeschlossenen Bereich $\{z \mid dist(z,w) inintvccm, M\}$. v ist in einem $\frac{m}{2}$-Schlauch um seine Spur rektifizierbar, wobei die Rektifizierung sooft um w herumgeht wie v. Damit liegt w nach dem Jordanschen Kurvensatz [tD91] im Inneren von v. Ein Punkt z mit $dist(z,w) > M + \frac{m}{2}$ liegt dann im Äußeren von v, und damit schneidet nach dem Jordanschen Kurvensatz jeder stetige Weg von w nach z den Weg v. Also ist die Menge der Punkte, die von w aus durch Wege erreichbar sind, die v nicht kreuzen, beschränkt.

□(Lemma 98)

Da die Möbiustransformation homöomorph ist, ist die Möbiustransformation einer wegzusammenhängenden Relation wieder wegzusammenhängend. Deshalb gilt:

Lemma 99 (Rotationssymmetrielemma) *:*
Für verwendbare Kalküle mit wegzusammenhängenden Basisrelationen gilt: Eine Basisrelation B *ist genau dann rotationssymmetrisch, wenn* $w \in Reg\,\mathsf{B}$ *oder* $\bar{w} = w^5 \in Reg\,\mathsf{B}$.

Beweis:
Sei $\mathsf{B}_w := Rel_{\mathfrak{K}}(0, 1, w)$, also $w \in Reg\,\mathsf{B}_w$. Weil $\mu(w) = 0$, folgt $w \in \mathsf{B}_w^{(231)}$ nach der obigen Behauptung, und da zwei Basisrelationen einer JEPD-Basis nach Definition gleich sind, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, ist $\mathsf{B}_w = (\mathsf{B}_w)^{(231)}$ rotationssymmetrisch.

$$1 - \frac{1}{\bar{w}} = \overline{(1 - \frac{1}{w})} = \bar{w}$$

vervollständigt den Beweis der Hin-Richtung.[1]
Für die Rück-Richtung nehmen wir an, es gäbe eine repräsentierbare rotationssymetrische Basisrelation B, die weder w noch $\bar{w}$ enthält. Dann gibt es wegen des Wegzusammenhangs einen stetigen Weg v von einem Punkt $z \in \mu(Reg\,\mathsf{B})$ nach $w^2 z \in \mu(Reg(B)^{(231)})$. Dann ist $w^2 \cdot v$ ein stetiger Weg von $w^2 z$ nach $w^4 z$, und $w^4 \cdot v$ ein stetiger Weg von $w^4 z$ nach $w^6 z = z$. Alle diese Wege verlaufen wegen der Rotationssymmetrie ganz in $\mu(Reg\,\mathsf{B})$, und sie bilden zusammen eine geschlossene Kurve, die mindestens $(3n+1)$-mal um $0 = \mu(w)$ herumläuft, da jeder Teilweg $n + \frac{1}{3}$ Umläufe macht. Diese Kurve geht nicht durch $\mu(w)$ oder $\mu(\infty)$, denn $w, \infty \notin Reg\,\mathsf{B}$. Weil die Basisrelationen wegzusammenhängend und paarweise disjunkt sind, folgt mittels Lemma 98, daß entweder die Basisrelation B_w, die w enthält, beschränkt ist, (nämlich, falls $\mu(w)$ und $\mu(\infty)$ auf verschiedenen Seiten der Kurve liegen) oder $\mathsf{B}_{\bar{w}}$, die $\bar{w}$ enthält, beschränkt ist, (falls $\mu(\bar{w})$ und $\mu(\infty)$ auf verschiedenen Seiten der Kurve liegen). Das ist ein Widerspruch zum 0-1-Satz 94.

□(Rotationssymmetrielemma 99)

Da also die Relation B_w mit $w \in Reg\,\mathsf{B}_w$ rotationssymmetrisch ist, gilt dies auch für ihr Komplement C von B in $\mathbb{C}$. [2]

[1] Hierfür wurde „wegzusammenhängend“ nicht benötigt.
[2] Genaugenommen ist Reg $\mathsf{C} = \mathbb{C} \setminus Reg\,\mathsf{B} \setminus \{0, 1\}$, da 0 und 1 Permutationen von ∞ sind.

Falls $\{lx\}$ echt verfeinert ist, also $\mathsf{B}_w \subsetneq \{lx\}$, gibt es einen Punkt $z \in Reg(\mathsf{C} \cap \{lx\})$, also mit $Im(z) > 0$. Dann ist wegen der Rotationssymmetrie $\mu(z)$, $w^2\mu(z)$, $w^4\mu(z) \in Reg\mathsf{C}$, und daher existiert ein Weg v von $\mu(z)$ nach $w^2\mu(z)$, der ohne Beschränkung der Allgemeinheit ganz in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\mu(Reg\mathsf{C} \cap \{z\ Im(z) \geq 0\})$ verläuft, denn $\mathbb{R} = \{z \mid Im(z) = 0\} \subseteq \mathsf{C}$ (vgl. Abbildung 5.2. v bildet zusammen mit w^2v und w^4v einen geschlossenen Weg, der $\mu(\infty)$ und $\mu(w)$ nicht enthält, da er im Komplement von B_w verläuft. Demnach liegt jeder Punkt aus B_w im Inneren dieser Kurve, das heißt B_w ist beschränkt im Widerspruch zum 0-1-Satz 94. Also ist die Annahme falsch und $\mathsf{B} \supset \{lx\}$. (Analog für rx)

$\square$(Theorem 96)

Anmerkung:
Wegen der Vollständigkeitseigenschaften verwendbarer Kalküle wird nach dem 0-1-Satz 94 jede unbeschränkte Relation von $\mathfrak{K}$ auf eine Relation abgebildet, die für jedes $\delta > 0$ Punkte enthält, die von $\mu(0), \mu(1), \mu(\infty)$ jeweils einen Abstand kleiner δ haben. Im Bild $\mu(Reg\mathsf{R})$ einer wegzusammenhängenden Relation R existiert daher ein Weg, der die δ-Umgebungen von $\mu(0), \mu(1)$ und $\mu(\infty)$ verbindet. Eine Konsequenz daraus ist das folgende Lemma:

Lemma 100 (Weglemma) *:*
Sei R eine unbeschränkte wegzusammenhängende Relation in einem endlichen Kalkül mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{TCI}$. Gelte $w, \bar{w} \notin Reg\ \mathsf{R}$. Sei

$$\Phi(\mu(Reg\mathsf{R})) := \{\phi \mid \exists z = r \cdot e^{i\phi} \in \mu(Reg\mathsf{R})\}$$

die Menge der Polarwinkel, die in $\mu(Reg\mathsf{R})$ auftreten. Für jede Winkelspanne $S < \frac{4\pi}{3}$ (entspricht 240°) existiert ein stetiger Weg $v \subset \mu(Reg\mathsf{R}) \subset \mathbb{C}$, so daß die Polarwinkel $\Phi(v)$ der Punkte des Weges eine S breite Spanne überdecken.

Beweis:
Sei $\frac{4\pi}{3} - S =: \varepsilon > 0$. Dann gibt es nach dem oben Angemerkten für $\delta = \sin(\frac{\varepsilon}{2})$ einen Weg, der die δ-Umgebungen um $U_\delta(\mu(0)), U_\delta(\mu(1))$ und $U_\delta(\mu(\infty))$ verbindet und in $\mu(Reg\mathsf{R})$ verläuft. Weil $\infty = \mu(\bar{w})$ und $0 = \mu(w)$, verläuft der Weg v ganz in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Es existiert ein Abschnitt des Weges, der $U_\delta(\mu(0))$ und $U_\delta(\mu(1))$ verbindet (für deren Punkte der Polarwinkel $\phi \in \left]\frac{2\pi}{3} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ bzw. $\phi \in \left]\frac{4\pi}{3} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ ist). Wegen der Stetigkeit von v gilt dann

$$\begin{array}{rcl} \Phi(v) & \supset & S_1 = \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{4\pi}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right]^3 \\ \text{oder } \Phi(v) & \supset & S_2 = \left[\frac{4\pi}{3} + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{8\pi}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right]^4 \end{array}$$

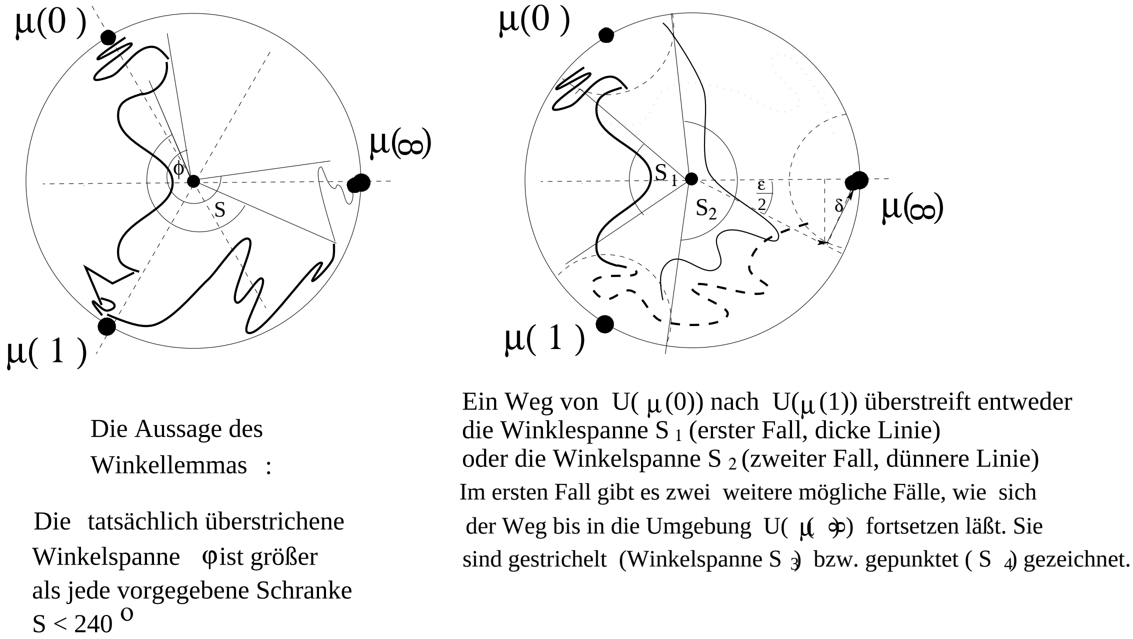


Abbildung 5.2: Skizze zum Weglemma: a. Die Aussage, b. Skizze zum Beweis

Im zweiten Fall ist das Lemma bewiesen. Im ersten Fall nutze ich weiterhin, daß v bis zu einem Punkt $p \in U_\delta(\mu(\infty))$ verlängert werden kann. (dessen Polarwinkel $\phi \in \ \left]-\frac{\varepsilon}{2}, +\frac{\varepsilon}{2}\right[$ ist) Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(v) &\supset S_3 = \left[\tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{4\pi}{3} - \tfrac{\varepsilon}{2}\right]^{5} \\ \text{oder } \Phi(v) &\supset S_4 = \left[\tfrac{2\pi}{3} + \tfrac{\varepsilon}{2}, 2\pi - \tfrac{\varepsilon}{2}\right]^{6} \end{aligned}$$

□(Lemma 100)

Unter den symmetrischen Relationenalgebren ist $\mathfrak{C}v$ sogar dann noch das feinste Kalkül, wenn man die Eigenschaft, daß das Komplement einer Basisrelation wegzusammenhngend ist nicht fordert. Es ist sogar neben $\mathfrak{C}q$ der einzige Kalkül dieser Art:

Theorem 101 (Sonderstellung von $\mathfrak{C}v$) *:*
$\mathfrak{C}v$ ist die einzige echte verwendbare symmetrische Verfeinerung von $\mathfrak{C}q$, in der jede Basisrelation wegzusammenhängend ist.

---

[3] wenn der Weg "links" (mit negativem Realteil) an w vorbeiführt
[4] wenn der Weg "rechts" (mit positivem Realteil) an w vorbeiführt
[5] wenn der Weg "oben" (mit positivem Imaginärteil) an w vorbeiführt
[6] wenn der Weg "unten" (mit negativem Imaginärteil) an w vorbeiführt

Nun zeige ich, daß jede symmetrische verwendbare Verfeinerung $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{E}q$ entweder die triviale Verfeinerung $\mathfrak{K}$ gleich $\mathfrak{E}q$ selbst oder $\mathfrak{C}v$ ist. Da $\mathfrak{K}$ eine JEPD-Basis besitzt, ist $\mathfrak{K}$ insbesondere erschöpfend, also existiert in ihr eine Basisrelation B_w, die den Punkt $w = e^{\frac{\pi}{3}\imath} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$ enthält. Sei $\mathsf{B} := \mathsf{B}_w \cap (\bar{\mathsf{B}_w}^{(12)})$. B ist damit zu sich selbst symmetrisch, und $\mathsf{B} \neq \emptyset$, denn $1-\bar{w} = w$. Da Basisrelationen Atome sind, nichtleere Teilrelationen einer Basisrelation also schon die ganze Basisrelation sind, gilt $\mathsf{B} = \mathsf{B}_w$.
Weiterhin existiert wegen der Permutationsvollständigkeit und Anschaulichkeit zu jeder Relation R die Relation $\bar{\mathsf{R}}^{(12)}$, für die nach dem Transformationssatz (Satz 78) gilt: $z \in R \iff 1-\bar{z} \in \bar{\mathsf{R}}^{(12)}$. Übertragen auf die Kreisscheibe mittels Möbiustransformation ergibt sich die Bedingung

$$\mu(z) \in \mu(Reg\,\mathsf{R}) \iff \bar{\mu(z)} \in \mu(Reg(\bar{\mathsf{R}}^{(12)})).$$

Denn

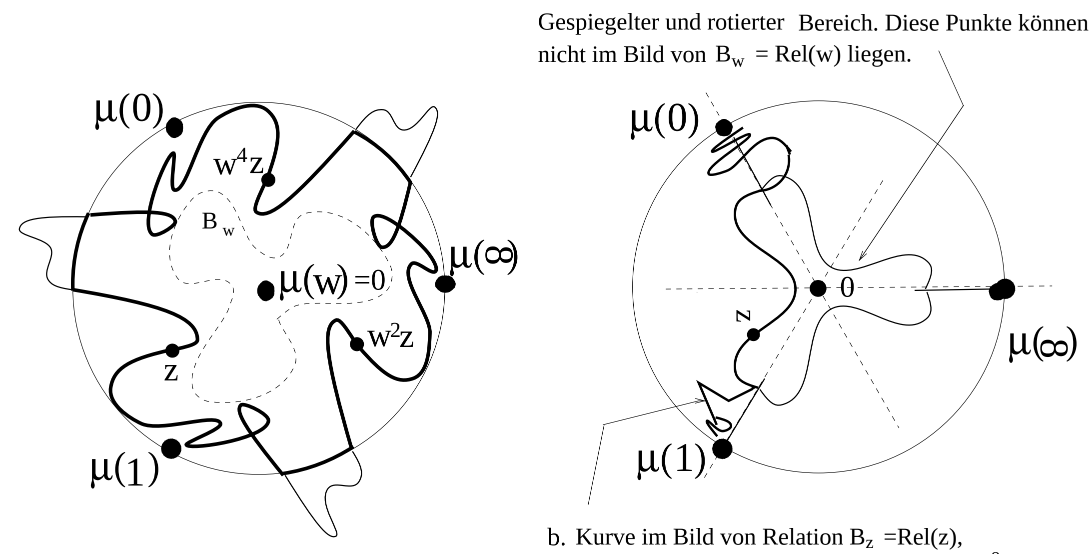
$$\begin{aligned}\mu(1-\bar{z}) &= \tfrac{1-\bar{z}-w}{1-\bar{z}-\bar{w}} &= \tfrac{\bar{w}-\bar{z}}{w-\bar{z}} \\ &= \tfrac{\bar{z-\bar{w}}}{\bar{z-w}} &= \bar{\mu(z)}\end{aligned}$$

Wegen $\mu(w) = 0$ folgt, daß $w \in (Reg(\mathsf{B}_w \cap \bar{\mathsf{B}}_w^{(12)})) \neq \emptyset$.

Betrachten wir die Relationen B_w und $\mathsf{B}_{\bar{w}} = \bar{\mathsf{B}_w}$. Sie sind beide Basisrelationen, denn gäbe es eine nichttriviale Teilrelation R von $\bar{\mathsf{B}_w}$, so wäre $\bar{\mathsf{R}}$ nichttriviale Teilrelation von B_w. Ich zeige nun, daß B_w und $\mathsf{B}_{\bar{w}}$ alle Punkte $\{z \mid \Im(z) \neq 0\}$, die nicht auf der Referenzlinie liegen, enthalten. Denn angenommen, es gäbe einen solchen Punkt $z \notin (Reg(\mathsf{B}_w \cup \mathsf{B}_{\bar{w}}))$. Dann wäre die zugehörige Relation B_z unbeschränkt nach dem Lemma über beschränkte, zusammenhängende Relationen. Nach dem Weglemma 100 enthält $Reg\,\mathsf{B}_z$ einen Weg v, so daß $\Phi(v)$ eine Spanne der Größe $\frac{2\pi}{3}$ und damit mindestens eines der 6 Intervalle $\left[\frac{2\pi}{6}k, \frac{2\pi}{6}(k+1)\right]$ umfaßt. Unter Ausnutzung der Rotations- und Spiegelsymmetrie von $\mu(Reg(\mathsf{B}_w \cup \mathsf{B}_{\bar{w}}))$ erhält man damit eine geschlossene Kurve, deren Punkte nicht in $\mu(Reg(\mathsf{B}_w \cup \mathsf{B}_{\bar{w}}))$ liegen (vgl. Abbildung 5.3). Diese Kurve geht nicht durch $\mu(\infty) = 1$, denn $1, 0, \infty \notin Reg\,\mathsf{B}_z$. Daraus folgt analog zum Beweis des Rotationssymmetrielemmas 99, daß entweder B_w oder $\mathsf{B}_{\bar{w}}$ beschränkt ist, im Widerspruch zum 0-1-Satz 94. Also kann $\mathfrak{K}$ außer B_w und $\mathsf{B}_{\bar{w}}$ keine unbeschränkte Basisrelation enthalten.

Wenn die Verfeinerung eine beschränkte Relation besitzt, dann ist dies nach dem Lemma über beschränkte, zusammenhängende Relationen die Relation $\{\mathtt{sc}\} =]0, 1[$. Dann enthält das Kalkül auch dessen Permutationen, und zusammen mit $\{\mathtt{e}_{13}\} = \{0\}$ und $\{\mathtt{e}_{23}\} = \{1\}$ trennen diese die beiden Halbebenen, die verschiedene Relationen $\{\mathtt{lx}\} = \mathsf{B}_w$ und $\{\mathtt{rx}\} = \mathsf{B}_{\bar{w}}$ repräsentieren, da $\mathfrak{K}$ wegzusammenhängend ist. Dann ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}v$.
Andernfalls enthält $\mathfrak{K}$ keine weitere Basisrelation, also repräsentiert jeder Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ein Tripel in B_w oder $\mathsf{B}_{\bar{w}}$, und wegen $x = \bar{x}$, gilt damit sogar $\mathsf{B}_w = \mathsf{B}_{\bar{w}} = neq$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}q$.

$\square$(Theorem ??)



a. Ein geschlossener Weg z -> w^2z -> w^4z -> z.
im Komplement von $\mu(B_w)$
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Weg ganz in der geschlossenen Kreisscheibe liegt (dicke Linie)

b. Kurve im Bild von Relation B_z =Rel(z),
die von 0 aus gesehen mindestens einen 60°-Winkel überstreicht.

Abbildung 5.3: a. Skizze zum Beweis von Theorem 96 ($\mathfrak{C}v$ ist feinster verwendbarer anschaulicher Kalkül). b. Skizze zum Beweis von Theorem 101. In beiden Fällen ist B_w beschränkt, weil es einen geschlossenen Weg im Komplement gibt.

Verzichtet man auf die Forderung nach Anschaulichkeit, läßt sich $\mathfrak{C}v$ endlich verwendbar verfeinern, etwa durch die unanschauliche Relationenalgebra, bestehend aus den Relationen

$$\mathsf{R} \cap \mathsf{A}, \mathsf{R} \cap \mathsf{T} \quad (\mathsf{R} \in R(\mathfrak{C}v\ ),$$

wobei $A := \{z \mid Re(z), Im(z) algebraisch\}$,
$T := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z)$ transzendent oder $Im(z)$transzendent$\}$ und
$Reg\mathsf{A} = A, Reg\mathsf{T} = T$. Die Transformationsoperationen sind
für alle π : $T^{\pi}(\mathsf{R} \cap \mathsf{A}) = T^{\pi}(\mathsf{R}) \cap \mathsf{A}$, $T^{\pi}(\mathsf{R} \cap \mathsf{T}) = T^{\pi}(\mathsf{R}) \cap \mathsf{T}$;

Die Kompositionen sind für alle $\mathsf{R}, \mathsf{S} \in R(\mathfrak{C}v\ )$:

${}_{\kappa}\diamond_{\lambda}$	$(\mathsf{S} \cap \mathsf{A})$	$(\mathsf{S} \cap \mathsf{T})$
$(\mathsf{R} \cap \mathsf{A})$	$(\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S}) \cap \mathsf{A}$	$(\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S}) \cap \mathsf{T}$
$(\mathsf{R} \cap \mathsf{T})$	$(\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S}) \cap \mathsf{T}$	$(\mathsf{R}\ {}_{\kappa}\diamond_{\lambda}\ \mathsf{S})$

Anmerkung:
Wie man sich leicht überzeugt, ist die so definierte Relationenalgebra verwendbar. Insbesondere die Kompositionsvollständigkeit von ${}_{3}\diamond_{2}$ ergibt sich

wegen dem Kompositionssatz (Satz 81) daraus, daß jede algebraische Zahl als Produkt rationaler Zahlen darstellbar ist, jede transzendente Zahl als Produkt einer algebraischen und einer transzendenten und jede Zahl als Produkt zweier transzendenter darstellbar ist. Die Schnitte mit den ursprünglichen Relationen stellen kein Problem dar, weil die transzendenten und algebraischen Zahlen jeweils dicht liegen.

Kapitel 6

Winkelkalküle

Die Eigenschaften von $\mathfrak{C}v$ sind nun weitgehend bekannt, und unter seinen anschaulichen kompositionsvollständigen Verfeinerungen müssen wir mit Unendlichkeit umgehen. Es bleibt zu hoffen, daß $\mathfrak{RC}$ und die naheliegenden Variationen von $\mathfrak{RC}$, die Winkelkalküle, wenigstens eine unendliche (abzählbare) JEPD-Basis besitzen. Eine Idee, damit umzugehen, besteht dann darin, sich auf das darstellbare Teilkalkül der Relationen zu beschränken, die von endlich vielen Basisrelationen durch endliche Vereinigung erzeugt werden. Deshalb will ich untersuchen, wie der TCI-Abschluß der Winkelkalküle aussieht. Ich werde dabei die überraschende Entdeckung machen, daß er selbst für nicht vollständige Winkelkalküle ein Oberkalkül von $(\mathfrak{RC})^{\cup}$ ist. Dazu zeige ich zunächst, daß alle Basisrelationen von $\mathfrak{RC}$ in$\mathfrak{K}\ ^{TCI}$ enthalten sind. Dann zeige ich, $(\mathcal{B}(\mathfrak{RC}))^{TCI} \supset (\mathfrak{RC})^{\cup})$ Dies begründet eine Sonderstellung von $\mathfrak{RC}$.

6.1 Der TCI-Abschluß der Winkelkalküle

Die Hauptaussage ist, daß eine große Klasse von Winkelkalkülen, nämlich die, den gleichen TCI-Abschluß besitzen wie $\mathfrak{RC}$. Zur Beschreibung dieser Klasse benötige ich die folgende Definition:

Definition 102 (Die Menge $\mathbf{A}_2$) *:*
Sei $\mathbf{A}_2$ der Abschluß der rationalen Zahlen unter den Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikaiton, Division und Quadratwurzel.
Ein Punkt mit Koordinaten aus $\mathbf{A}_2$ heißt $\mathbf{A}_2$ - Punkt. Eine Gerade, die zwei $\mathbf{A}_2$ - Punkte enthält, heißt $\mathbf{A}_2$ - Gerade, ein Kreis mit drei $\mathbf{A}_2$ - Punkten ein $\mathbf{A}_2$ - Kreis und ein von zwei $\mathbf{A}_2$ - Geraden bildbarer Winkel heißt $\mathbf{A}_2$ - Winkel. Eine von einer dieser Mengen begrenzte Region heißt $\mathbf{A}_2$ - Standardregion und die zugehörigen RST-Relationen heißen $\mathbf{A}_2$ - Standardrelationen.

α muß in einem Winkelkalkül nicht notwendigerweise $\mathbf{A}_2$ - Winkel sein. Ist aber α ein $\mathbf{A}_2$ - Winkel, so heißt der Kalkül $\mathbf{A}_2$ - Winkelkalkül.

Beispiel:

$\mathfrak{RC}$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ sind $\mathbf{A}_2$ -Winkelkalküle, denn $\{\mathtt{rp}\} = \{\measuredangle 90\}$ ist in ihnen enthalten, und es gibt zwei $\mathbf{A}_2$ - Geraden (etwa die Koordinatenachsen), die einen 90^o-Winkel bilden.

Theorem 103 (Hauptsatz der Winkelkalküle) *:*
Für alle $\mathbf{A}_2$ -Winkelkalküle $\mathfrak{K}_{\alpha^o}$ gilt: $\mathfrak{K}_{\alpha^o}{}^{TCI} = \mathfrak{RC}^{\ TCI}$.

Vorgehensweise: Ich bestimme nun den TCI-Abschluß der Winkelkalküle. Um zu beweisen, daß eine Relation $\mathsf{R} \in \mathfrak{K}^{\ TCI}$ liegt, wenn $\mathfrak{K}$ die Relationen R_i umfaßt, werde ich als Hilfsmittel einige Folgerungen der Art beweisen:

Definition 104 (R erfordert S) *:*
*Im Folgenden bedeute $\mathsf{R} \looparrowright \mathsf{S}$ (R **erfordert** S) für zwei Mengen von Relationen $R = \{\mathsf{R}_i,\ i \leq m\}$ und $\mathsf{S} = \{\mathsf{S}_i,\ i \leq n\}$, daß für jedes $\mathsf{S}_i \in \mathsf{S}$ in jedem Kalkül gilt:*

$$\forall i \leq m \mathsf{R}_i \in \mathfrak{K}^{\ TCI} \Rightarrow \mathsf{S}_i \in \mathfrak{K}^{\ TCI}.$$

Für einelne Relationen r, s, bedeute $\mathtt{r} \looparrowright \mathtt{s}$ dasselbe wie $\{r\} \looparrowright \{s\}$.

Anmerkung:

Offensichtlich ist "erfordern" transitiv und reflexiv.

Da, wie gesehen, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}^{TCI}$ gilt, wird so stückweise für immer größere Klassen von Relationen gezeigt, daß sie im TCI-Abschluß $\mathfrak{K}^{\ TCI}$ enthalten sind. Insbesondere werden folgende spezielle Relationen benötigt:

$\mathtt{Line} := \{z \mid Imz = 0\} = \{\ \{\mathtt{sf}\},\ \{\mathtt{e}_{23}\},\ \{\mathtt{sc}\},\ \{\mathtt{e}_{23}\},\ \{\mathtt{sb}\}\}$ ist die Relation, die genau die Tripel enthält, bei denen der Zielpunkt auf der Referenzgeraden liegt.
$\mathtt{Midpoint} := \{\frac{1}{2}\}$ ist die Relation, die genau die Tripel enthält, bei denen der Zielpunkt in der Mitte zwischen Start- und Referenzpunkt liegt (wobei die drei Punkt nicht zusammenfallen).
$\mathtt{NotAhead} := \{\measuredangle 0^o\} = \{\ \{\mathtt{sb}\},\ \{\mathtt{e}_{13}\},\ \{\mathtt{sc}\}\}$ ist die Teilrelation von $\mathtt{Line}$, die genau die Tripel (a, b, c) enthält, bei denen a und c auf der gleichen Seite von b liegen.

Wegen der Vollständigkeitseigenschaften gilt: Wenn R_1 und R_2 und R_3 in $\mathfrak{K}^{TCI}$ enthalten sind, dann auch für jede Permutation π die Relation R^π und für jedes $\kappa \neq \lambda \leq 3$ die Relation

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{R}_1 & (a,b:d) \\ {}_\kappa\diamond_\lambda & \mathsf{R}_2 & (a,d:c) \\ \cap & \mathsf{R}_3 & (a,b:c) \\ = & \mathsf{S} & (a,b:c) \end{array}$$

Mit dieser Schreibweise führe ich im Folgenden zugleich die Bezeichnungen für die resultierende Relation S ein, wenn sie nicht sowieso einfach durch eine Region beschrieben wird. In den Fällen, in denen die Komposition eine Region definiert, genügt meistens kurzes Nachdenken, um zu sehen, daß die dadurch erklärte Relation tatsächlich die vollständige Komposition der beiden Operandenrelationen ist. Ich werde dies zwar meistens nachweisen, aber doch manchmal auslassen, wenn der Nachweis trivial ist.

Lemma 105 (Winkeladdition in $\mathfrak{K}^{TCI}$) *:*
1. $\{\measuredangle\alpha l, \measuredangle\beta l\} \looparrowright \{\measuredangle(\alpha+\beta)l, \measuredangle k\alpha l \mid k \in \mathbb{N}\}$

2. $\{\measuredangle\alpha, \measuredangle\beta\} \looparrowright \{\measuredangle(\alpha+\beta), \measuredangle k\alpha \mid k \in \mathbb{N}\}$

3. $\{\measuredangle\,]\alpha_1{}^o, \beta_1{}^o]\,, \measuredangle\,]\alpha_2{}^o, \beta_2{}^o]\,\} \looparrowright \{\measuredangle\,](\alpha_1+\alpha_2)^o, (\beta_1+\beta_2)^o]\,, \measuredangle\,]k\alpha_1{}^o, k\beta_1{}^o] \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis:
1. Alle auftretenden Relationen sind RST-Relationen. Die erste Aussage gilt daher, weil

$$\begin{array}{ccc} & \measuredangle\alpha\ \wr & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \measuredangle\beta\ \wr & (a,d:c) \\ = & (\measuredangle\alpha+\beta)\ \wr & (a,b:c) \end{array}$$

nach dem Kompositionssatz (Satz 81) , denn $\measuredangle\phi l$ besteht genau aus den Tripeln, deren komplexe Repräsentation den Polarwinkel ϕ hat, und bei der Multiplikation komplexer Zahlen addieren sich die Winkel. Umgekehrt findet sich zu jeder Instantiation offensichtlich ein Punkt d^θ, etwa der auf $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ geeichte.
2. Da $\mathsf{R}^{(12)}\ {}_3\diamond_1\ S^{(12)} = (\mathsf{R}\ {}_3\diamond_2\ S)^{(12)}$, folgt

$$\begin{array}{ccc} & \measuredangle\alpha & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \measuredangle\beta & (d,b:c) \\ = & \measuredangle\alpha+\beta) & (a,b:c) \end{array}$$

und damit $\{\measuredangle\alpha, \measuredangle\beta\} \looparrowright (\{\measuredangle(\alpha+\beta)\}$.
Jeweils durch Induktion mit $\beta = (k-1)\alpha$ folgt, daß $\measuredangle\alpha$ erfordert $\measuredangle k\alpha$.

3. Die erste Aussage folgt aus dem Schema oben, denn wenn $\alpha_1 < \gamma_1 \leq \beta_1$ und $\alpha_2 < \gamma_2 \leq \beta_2$, dann gilt für den nach 1. enthaltenen Winkel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, daß $\alpha_1 + \alpha_2 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq \beta_1 + \beta_2$. Umgekehrt läßt sich auch jeder Winkel $\gamma : \alpha_1 + \alpha_2 < \gamma \leq \beta_1 + \beta_2$ so als Summe schreiben. Die zweite Aussage folgt wieder per Induktion.

$\square$(Winkeladditionslemma 105)

Korollar 106 (Trunkierungslemma) *:*
Wenn α ein Teiler von 360 ist, dann gilt:
$\measuredangle\,]\alpha_0, \alpha] \;\looparrowright\; \{\measuredangle\alpha\}$

Beweis:
Sei $t\alpha = 360$ Wegen der Permutationsvollständigkeit erfordert $]\alpha_0, \alpha]$ auch $]\alpha_0, \alpha] \overset{(31)}{=} [-\alpha, -\alpha_0[$ Nach dem Winkeladditionslemma erfordert diese permutierte Relation

$$]-(t-1)\alpha_0, -(t-1)\alpha] \;=\;]-(t-1)\alpha_0, \alpha]\ ,$$

als Schnitt mit $]\alpha_0, \alpha]$ die gewünschte Relation $\{\measuredangle\alpha\}$ erfordert.

$\square$(Korollar 106)

Dieses Trunkierungslemmas zeigt, daß selbst der ^{TCI}-Abschluß von Kalkülen, die noch keinen einzelnen Winkel enthalten, Winkelkalküle sein können.

Ich fasse alle auch für nicht wegzusammehnhängende Relationen geltenden hinrechenden Kriterien für einen unendlichen TCI–Abschluß zusammen:

Theorem 107 (Kriterien für unendlichen TCI-Abschluß) *:*
Wenn $\mathfrak{K}$ eine der folgenden Relationen enthält, ist $\mathfrak{K}^{\,TCI}$ unendlich:
1. eine beliebige beschränkte Relation oder
2. für zwei beliebige Winkel $\alpha, \beta \neq 0$ eine Relation, die nicht Teilmenge von $\mathtt{Line}$*, aber Teilmenge der Winkelrelation $\measuredangle\,[\alpha^o, \beta^o]$ ist, oder*
3. $\measuredangle\,]0^o, \beta^o[$ wobei $\frac{\beta}{360} \notin \mathbb{Q}$.

Anmerkung:
Punkt 1. umfaßt Punktrelationen $\{z\}, z \notin \{0, 1\}$ gilt: $\{z\}$, beliebige Intervalle außer denen mit $\partial I = \{0, 1\}$ und endliche Vereinigungen davon, denn diese sind alle beschränkt.

Beweis:
1. Folgt direkt aus dem 0-1-Satz 94

2. Alle Punkte, die in der Region der revers Transformierten enthalten sind, liegen zwischen zwei Kreisbögen, die durch die Bedingung "Winkel am Zielpunkt= α" und "Winkel am Zielpunkt = β" festgelegt sind. Daher ist die Transformierte beschränkt.
3 : Nach dem Winkeladditionslemma erfordert $\measuredangle\,]0^o, \beta^o[$ alle Relationen $\measuredangle\,]0^o, k\beta^o[$ für $k \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung sind diese alle verschieden.

□(Satz 107)

Insbesondere gilt damit für beliebige Winkelkalküle: Jede permutations-, kompositions- und schnittvollständige Winkel-Relationenalgebra $\mathfrak{K}_{\measuredangle\alpha^o}$ ist unendlich.
Wie kann man mit dieser Unendlichkeit umgehen? Eine Möglichkeit besteht darin, jede Relation von $\mathfrak{RC}^{\,TCI}$ im Prinzip zuzulassen. Denn in jedem CSP (in jeder Konstellation) kann die Wissensbasis als endlich angenommen werden, indem jede Relation als Folge möglicher Kompositionen, Transformationen und Schnitte über einem endlichen Grundkalkül beschrieben wird (so wie $\mathfrak{DC}$ in Tabelle 2.3 als Schnitt von Transformationen aus $\mathfrak{SC}$ beschrieben ist). Dennoch könnte man denken, daß es vorkommen kann, daß ein Ableitungsalgorithmus[1], der auf allen Relationen die Kompositionen und Permutationen ausführt und zur Wissensbasis hinzufügt, nie abbricht, da immer neue Relationen entstehen. Ich vermute jedoch, daß die Endlichkeit des CSP in vollen Kalkülen garantiert, daß nach nur endlich vielen Schritten jede Komposition und Permutation und Schnitt von Relationen schon in dem verfeinerten CSP vorkommt. Dann ist das bi s zu dieser Stufe verfeinerte Kalkül zwar nicht kompositionsvollständig, aber alle im CSP vorkommenden Kompositionen sind vollständig, und daher ist die Folgerung, die sich ergibt, informationserhaltend. Genau dann, wenn $\emptyset$ ableitbar ist, ist das Ausgangs-CSP inkonsistent. In der Praxis kann es allerdings problematisch sein, festzustellen, ob ein Schnitt solcher fortgesetzter Kompositionen leer ist, denn diese Aufgabe käme einer Lösung eines Gleichungssystems gleich, und ist damit so aufwendig wie die ursprüngliche Fragestellung, ob das gegebene CSP erfüllbar ist.

[1] z. B. ein Algorithmus, der analog zu dem von Maxworth und U. Montanari [Mac77, Mon74] vorgestellten Algorithmen [Mac77], [vBC90] Kompositionsvollständigkeit herzustellen versucht

6.1.1 Der Hauptsatz der Winkelkalküle

Bei den Winkelkalkülen läßt sich der TCI-Abschluß noch präziser formulieren.

Theorem 108 (Winkelkalküle erfordern alle rationalen Zahlen) *:*
Der TCI-Abschluß eines beliebigen Winkelkalküls enthält alle durch rationale Zahlen x repräsentierten Relationen.

Beweis:
Der Beweis setzt sich aus vielen Einzelbeobachtungen zusammen. Ich gebe nun zuerst einen Überblick:
Zuerst zeige ich, daß jede Winkelrelation die Relation $\{sf\}$ erfordert, die in Kombination mit der Winkelrelation $\{\measuredangle\alpha\}$ die Relationen $Midpoint$, $\{\measuredangle\frac{\alpha}{2}\}$ und $\{rl\}$ erfordert. Dies liegt daran, daß zwei Geraden die beide einen Winkel $\alpha < 90^o$ mit den Endpunkten einer Strecke einschließen, sich in einem Punkt schneiden. Dieser Schnittpunkt legt eine Strecke und einen Winkel bezüglich der Referenzstrecke fest, und bei geeigneter Komposition dieser Relation mit ihrer eigenen Permutation erhält man aus Symmetriegründen diese drei Relationen.
Weiter zeige ich, daß allein schon die Relation $Midpoint$ alle rationalen Zahlen entsprechenden Relationen erfordert, indem ich für jede Grundrechenart eine Komposition angebe, so daß die Relationen $\{sf\}$, x und die Relation y die Relationen $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ erfordern.

Als erstes zeige ich, daß jeder TCI-Abschluß eines Winkelkalküls die Relation $Line = \ell(a,b)$ erfordert, die alle Tripel enthält, deren Zielpunkt auf der Referenzgeraden liegt. Dadurch ergibt sich, daß Punktrelationen, deren Komposition selbst immer wieder Punktrelationen sind, wieder neue Winkelrelationen erfordern. Die Ausdrucksmächtigkeit der Winkelkalküle ergibt sich also daraus, daß auf diese Weise eindimensionale Relationen durch Schnitt nulldimensionale (Punktrelationen) erfordern und umgekehrt aber auch nulldimensionale Relationen eindimensionale erfordern.

Lemma 109 (Linienlemma) *:*
1.Für jeden beliebigen Winkel α gilt: $\measuredangle\alpha^o \looparrowright \measuredangle-\alpha^o$, $NotAhead$.
2. $NotAhead \looparrowright \{sf\}$, $Line$
3. $\measuredangle\alpha^o \looparrowright \measuredangle(180-\alpha)^o$
4. $sf \looparrowright Notahead$, $Line$

Beweis:
1. $\measuredangle\alpha^o \looparrowright \measuredangle(-\alpha)^o$, da $\measuredangle(-\alpha)^o = \measuredangle\alpha^{o(13)}$. $NotAhead{=}\measuredangle 0^o$.

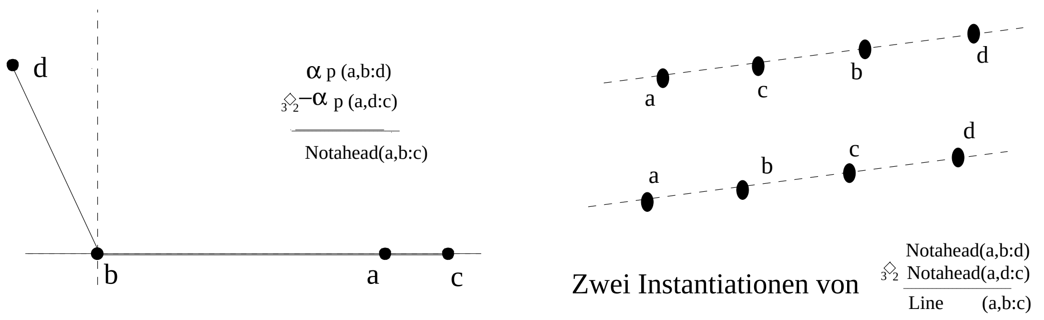


Abbildung 6.1: Skizze zum Beweis des Linienlemmas 109

Also $\{\measuredangle\alpha^o, \measuredangle-\alpha^o\} \looparrowright \mathsf{NotAhead}$ nach dem Winkeladditionslemma. (vgl. Abbildung 6.1a.)

$\mathsf{NotAhead} \cap \mathsf{Forward} = \{\mathsf{sc}\}$, und $\{\mathsf{sc}\}^{(23)} = \{\mathsf{sf}\}$.
Also $\mathsf{NotAhead} \looparrowright \mathsf{sf}$.
Daraus folgt schon

$$\begin{array}{ccc} & \{\mathsf{sf}\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathsf{NotAhead} & (a,d:c) \\ = & \mathsf{Line} & (a,b:c) \end{array}$$

Denn offenbar ist die Eigenschaft, kolinear zu liegen, transitiv, also folgt aus $d \in \ell(a,b)$ und $c \in \ell(b,d)$ auch $c \in \ell(a,b), also \{\mathsf{sf}\}\ {}_3\diamond_2\ \mathsf{NotAhead} \subseteq \mathsf{Line}$. Umgekehrt ist diese Komposition vollständig, denn indem d so instanziert wird, daß d von a aus hinter b und gegebenenfalls noch hinter c liegt, findet sich für jede Instantiation von Line eine realisierende Erweiterung.(vgl. Abbildung 6.1b.)
3. folgt aus $\measuredangle\alpha^o \looparrowright \mathsf{sf}, \measuredangle(-\alpha)^o$, der Tatsache, daß $\{\mathsf{sf}\}$:=$\{\measuredangle 180^o\}$ und dem Winkeladditionslemma.
4. folgt aus 1. und 2. da $\{\mathsf{sf}\}$:=$\{\measuredangle 180^o\}$ eine spezielle Winkelrelation ist.

$\square$(Linienlemma 109)

Unter Ausnutzung des Linienlemmas 109 ergibt sich, daß mit $\measuredangle\alpha^o \in \mathfrak{K}^{\ TCI} \Rightarrow \{\measuredangle\frac{\alpha}{2}\} \in \mathfrak{K}^{\ TCI}$:

Lemma 110 (Symmetrielemma) *:*
Für jeden "schrägen" Winkel $\alpha \neq k \cdot 90^o$ (für alle $k \in \mathbb{Z}$) gilt:
$\measuredangle\alpha^o \looparrowright \mathsf{Midpoint}, \mathsf{rl}$.

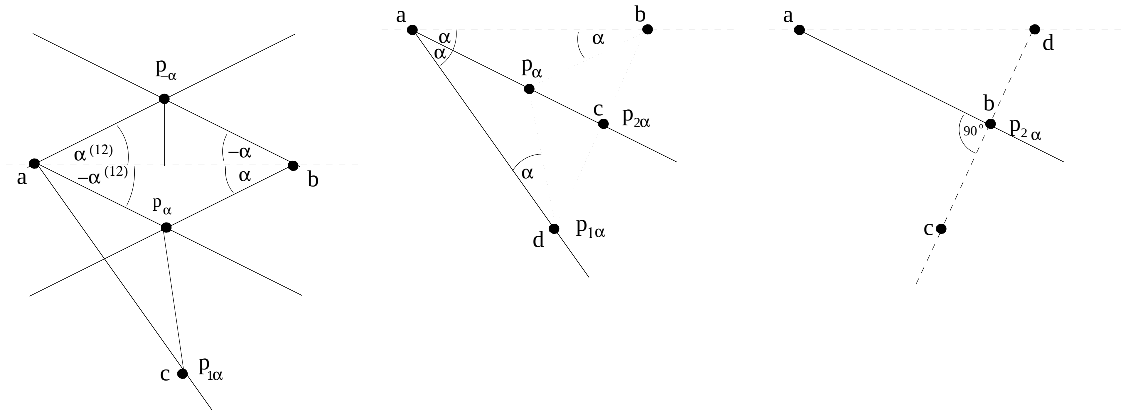


Abbildung 6.2: Skizze zum Beweis des Symmetrielemmas 110

Beweis:
Nach dem Linienlemma 109, Punkt 3. sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|\alpha| < 90^o$.
Wegen der Schnittvollständigkeit erfordert $\{\measuredangle\alpha^o\}$ die Relationen, die durch die Schnittpunkte der von a und b ausgehenden Winkelschenkel definiert werden, die den Winkel α mit der Referenzstrecke bilden. Formal lautet die Beschreibung

$$\{\measuredangle\alpha^o\} \cap \{\measuredangle -\alpha^o\}^{(12)} := \{\mathfrak{p}_{\alpha^o}\}$$

und

$$\{\measuredangle -\alpha^o\} \cap \{\measuredangle\alpha^o\}^{(12)} := \{\mathfrak{p}_{-\alpha^o}\}$$

Die in Abbildung dargestellte Komposition

$$\begin{array}{ccc} & \{\mathfrak{p}_{\alpha^o}\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \{\mathfrak{p}_{-\alpha^o}\}^{(23)} & (a,d:c) \\ = & \mathfrak{p}_1 & (a,b:c) \end{array}$$

erfordert die eindimensionale Relation $\mathfrak{p}_{1,\alpha}$, die widerum in Verbindung mit Line

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{p}_1 & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathit{Line} & (d,b:c) \\ \cap & \{\measuredangle -\alpha^o\}^{(12)} & (a,b:c) \\ = & \mathfrak{p}_2 & (a,b:c) \end{array}$$

Wegen $\{-\alpha\}^{(12)}\ (\mathfrak{p}_\alpha, a : b)$, $\{-\alpha\}^{(12)}\ (\mathfrak{p}_{2,\alpha}, a : b)$, gilt in jeder Instantiation der linken Seite, daß $a^\theta, {\mathfrak{p}_\alpha}^\theta, {\mathfrak{p}_{2,\alpha}}^\theta$ kolinear liegen. Außerdem gilt

$$\measuredangle {\mathfrak{p}_{1,\alpha}}^\theta a^\theta {\mathfrak{p}_{2,\alpha}}^\theta = \alpha^o = -\measuredangle b^\theta a^\theta {\mathfrak{p}_{2,\alpha}}^\theta,$$

und

$$\measuredangle a^\theta b^\theta {\mathfrak{p}_\alpha}^\theta = \alpha^o = -\measuredangle a^\theta {\mathfrak{p}_{1,\alpha}}^\theta {\mathfrak{p}_\alpha}^\theta.$$

Daraus folgt nun, daß die Dreiecke $\Delta a^\theta b^\theta \mathfrak{p}_\alpha{}^\theta$ und $\Delta a^\theta \mathfrak{p}_{1,\alpha}{}^\theta \mathfrak{p}_\alpha{}^\theta$ deckungsgleich sind, weswegen b^θ und $\mathfrak{p}_{1,\alpha}{}^\theta$ bezgl. $\ell(a^\theta, \mathfrak{p}_{2,\alpha})$ achsensymmetrisch zueinander liegen.
Folglich gilt, daß $\mathfrak{p}_{2,\alpha}{}^\theta$ der Mittelpunkt von b^θ und $\mathfrak{p}_{1,\alpha}{}^\theta$ ist, und daß $\ell(b^\theta, \mathfrak{p}_{1,\alpha}{}^\theta)$ die Achse $\ell(a^\theta, \mathfrak{p}_{2,\alpha}{}^\theta)$ senkrecht schneidet. Deshalb erfordert $\{\measuredangle -\alpha^o\}$ die Relation $\mathsf{Midpoint}$ durch

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{p}_{1,\alpha}{}^{(31)} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathfrak{p}_{2,\alpha} & (d, b : c) \\ = & \mathsf{Midpoint} & (a, b : c) \end{array}$$

und die Relation $\{\mathsf{rl}\}$ durch

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{p}_2^{(23)} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathsf{sf} & (d, b : c) \\ = & \mathsf{rl} & (a, b : c) \end{array}$$

□(Symmetrielemma 110)

Der folgende Satz zeigt, daß die Ausnahme von 90^o Da das Symmetrielemma 110 zeigt, daß jeder Winkel einen rechten erfordert, und der folgende Satz zeigt, daß auch schon ein rechter Winkel nicht-rechte Winkel erfordert, bilden beide Sätze zusammen den Kern meines Beweises des Hauptsatzes.

Satz 111 (Konvertierung spezieller Winkel) *:*
Für Kalküle $\mathfrak{K}$ ist äquivalent:
1. Ein rechter Winkel ist in $\mathfrak{K}^{TCI}$ enthalten.
2. Ein 60^o-Winkel ist in $\mathfrak{K}^{TCI}$ enthalten.
3. Ein 30^o-Winkel ist in $\mathfrak{K}^{TCI}$ enthalten.

Beweis:
Beweis-Schema.: Ich zeige daß jeder rechte Winkel einen 60^o-Winkel erfordert, jeder 60^o-Winkel einen 30^o-Winkel und jeder 30^o-Winkel einen rechten.

<u>Schritt von 1. nach 2.:</u>

Die Permutationsvollständigkeit erfordert, daß Relationen $\{\mathsf{olc}\}$, $\{\mathsf{lp}\}$, $\{\mathsf{rp}\}$, $\{\mathsf{rl}\} \in \mathfrak{K}^{TCI}$. Folglich

$$\begin{array}{ccc} & \{\mathsf{rp}\} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_1 & \{\mathsf{rp}\} & (d, b : c) \\ = & \{\mathsf{sf}\} & (a, b : c) \end{array}$$

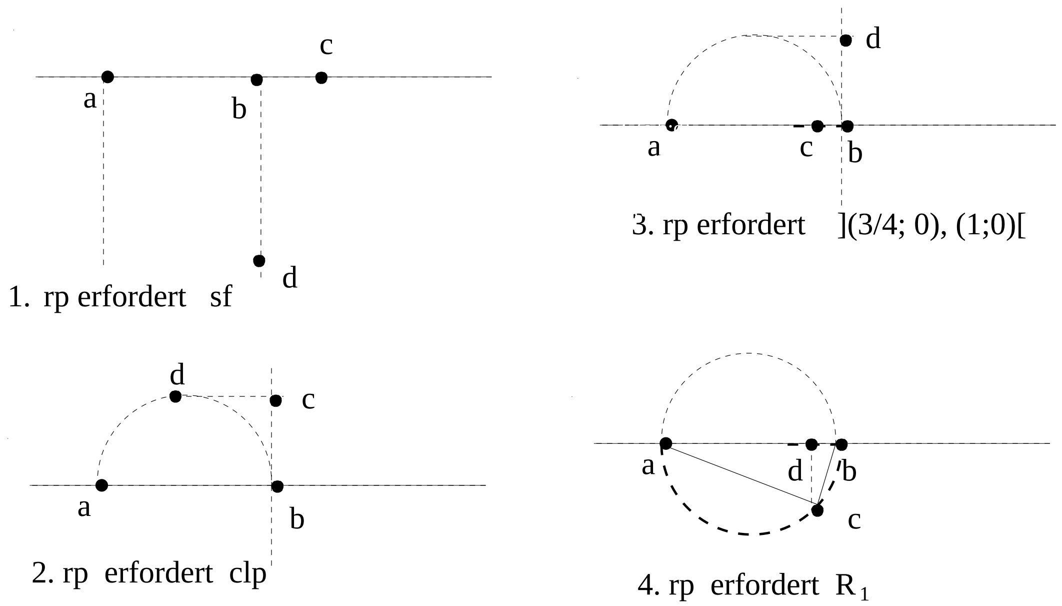


Abbildung 6.3: Skizze zum Beweis derKonvertierung

$\in \mathfrak{K}^{TCI}$ (vgl. Abbildung 6.3a.)Wir wissen bereits, daß mit $\{\mathit{sf}\}$ auch $\mathit{Line} \in \mathfrak{K}^{TCI}$ ist. Der Beweis besteht nun aus einer geschickt gewählten Folge von solchen Kompositionen, mit deren Hilfe man die gewünschten Relationen erhält:

$$\begin{array}{ccc} & \{olc\} & (a,b:d) \\ _3\diamond_1 & \{olc\} & (d,b:c) \\ \cap & \{lp\} & (a,b:c) \\ = & \{\mathit{clp}\} & (a,b:c) \end{array}$$

wobei $\{\mathit{clp}\}{:=}\ \big](1;0),(1;\frac{1}{2})\big[$ (close left perpendicular) die Teilrelation von $\{\mathit{lp}\}$ ist, die genau die Tripel (a,b,c) enthält, für die $dist(c,b) = \frac{1}{2}\, dist(a,b)$ gilt (vgl. Abbildung 6.3b.) Analog $\mathit{rp} \leftrightsquigarrow \mathit{crp}$. Weiterhin

$$\begin{array}{ccc} & \{\mathit{clp}\} & (a,b:d) \\ _3\diamond_1 & \{\mathit{crp}\} & (d,b:c) \\ \cap & \{sc\} & (a,b:c) \\ = & \big](\frac{3}{4};0),(1;0)\big[& (a,b:c) \end{array}$$

, wie unmittelbar einsichtig, weil es genau dann ein passendes d gibt mit $dist(c,b) \leq dist(b,d) \leq dist(a,b)$.
Nun folgt der entscheidende Schritt:

$$\begin{array}{ccc} & \big](\frac{3}{4};0),(1;0)\big[& (a,b:d) \\ _3\diamond_2 & \{\mathit{lp}\} & (a,d:c) \\ \cap & \{olc\} & (a,b:c) \\ = & \mathsf{R}_1 & (a,b:c) \end{array}$$

Für die Tripel (a,b,c) von R_1 gilt, daß $dist(b,c) \leq \frac{1}{2} \cdot dist(a,b)$, weil nach dem Kathetensatz $dist(b,c)^2 = dist(d,b) \cdot dist(a,b)$. Da beim gleichseitigen Dreieck die Höhe die Seite gerade halbiert, bei größeren Winkeln aber näher an der Ecke steht, folgt daraus, daß $60^o \leq \measuredangle abc < 90^o$. Umgekehrt findet sich durch Projektion natürlich zu jeder Instanziation *schon* auf dem Thaleskreis über ab ein entsprechender Punkt d durch orthogonale Projektion. Durch

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{e}_{23} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathsf{R}_1 & (d,b:c) \\ = & [90^o, 120^o[& (a,b:c) \end{array}$$

zeigt sich, daß die ganze Relation, die durch die Winkel von 90^o bis 120^o definiert wird, in $\mathfrak{K}^{TCI}$ ist.
Nach dem Trunkierungslsemma folgt daraus, daß die Relation $\measuredangle 120^o \in \mathfrak{K}^{\ TCI}$, die nach Winkeladditionslemma zusammen mit $\{\mathfrak{sf}\} = \measuredangle 180^o$ die Relation $\measuredangle 300^o = \measuredangle -60^o$ erfordert.

$\Box$(1.$\Rightarrow$ 2.)

Schritt von 2. nach 3.:

Zunächst einmal erfordert die Permutationsvollständigkeit, daß die Relationen $\{\measuredangle 60^o\}$, $\{\mathfrak{d}\ \measuredangle 120^o\}, \in \mathfrak{K}^{TCI}$. Folglich $\{\ \mathfrak{d}\ \measuredangle 120^o\} \cup \{\measuredangle 60^o\} = \{(\frac{\sqrt{3}}{2};)\} \in \mathfrak{K}^{TCI}$, und damit

$$\begin{array}{ccc} & \{(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})\} & (d,b:c) \\ = & \{(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})\} & (a,b:c) \end{array}$$

Nach dem Linienlemma 109 erfordert $\{\measuredangle 60^o\}$ $\{\mathsf{NotAhead}, \mathsf{Line}\}$. Daraus folgt daß $\{\measuredangle 30^o\} \in \mathfrak{K}^{TCI}$, denn

$$\begin{array}{ccc} & \{(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathsf{NotAhead} & (d,b:c) \\ = & \{\measuredangle 30^o\} & (a,b:c) \end{array}$$

$\Box$(2.$\Rightarrow$ 3.)

Schritt von 3. nach 1. und 2.:

Zunächst einmal erfordert die Permutationsvollständigkeit, daß die Relationen $\{\measuredangle 30^o\}$, $\{\mathfrak{d}\ \measuredangle 30^o\} \in \mathfrak{K}^{\ TCI}$ Nach dem Winkeladditionslemma erfordert $\{\measuredangle 30^o\}$ $\{\measuredangle 60^o\}$ und $\{\measuredangle 90^o\}$.

$\Box$(3.$\Rightarrow$ 1., Satz 111)

Korollar 112 (Symmetrielemma für rechte Winkel) *:*
Auch für $|\alpha| = 90^o$ *gilt:* $\measuredangle\alpha^o \;\looparrowright\; \mathit{Midpoint},\;\{\mathit{rl}\}$.

Beweis:
$\{\measuredangle 90^o\}$ erfordert $\{\measuredangle 60^o\}$. Nun folgt die Behauptung nach dem Symmetrielemma 110 für $\alpha = 60$.

□(Korollar **??**)

Lemma 113 (Winkelhalbierungslemma) *:*
Für jeden Winkel $\alpha \neq 180^o$ *gilt:*
$\measuredangle\alpha^o \looparrowright \measuredangle\frac{\alpha}{2}^o$.

Beweis:
Für $\alpha = 0^o$ ist nichts zu beweisen, also erfüllt α ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Voraussetzung des Symmetrielemmas 110. Aus $\measuredangle\alpha^o \looparrowright \mathit{Midpoint},\ \mathit{rl}$ folgt weiter Es gilt

$$\begin{array}{ccc} & \{\alpha \neq 180^o\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{Midpoint} & (a,d:c) \\ \cap & \mathit{orc} & (a,b:c) \\ = & \{\measuredangle\frac{\alpha}{2}^o\} & (a,b:c) \end{array}$$

Denn in jeder Instantiation gelten die Relationen der linken Seite genau dann, wenn der Punkt d^θ, durch Achsenspiegelung von a^θ an $\ell(b^\theta, c^\theta)$ hervorgeht. Aus Symmetriegründen liegt dann c^θ auf der Winkelhalbierenden. Umgekehrt findet sich zu jeder Instantiation von $\{\measuredangle\frac{\alpha}{2}^o\}(a,b:c)$ durch Achsenspiegelung ein Punkt d^θ, der den Relationen entspricht.

□(Winkelhalbierungslemma 113)

Fundamental für die Gültigkeit des Theorems ist die Tatsache, daß alle durch rationale Zahlen repräsentierten Relationen schon im TCI-Abschluß jedes RST-Kalküls enthalten sind, das einen ausgezeichneten Punkt außer 0 und 1 enthält. Dazu zeige ich zunächst als Folgerung aus dem Multiplikationssatz und dem Kompostionssatz, daß es für jede Grundrechenart eine Folge von Kompositionen und Permutationen gibt, die sie "simuliert":

Satz 114 (Arithmetiksatz) *:*
Wenn $z \notin \{0,1\}$*, dann gilt*

$$\{z\}, R, S \looparrowright \{-1\}, R + \{z\}, R - \{z\}, \{z\} - R, \mathsf{R}\cdot\mathsf{S}, \frac{R}{S},$$

wobei $\{z\}, R, S$ *als Repräsentation der Relationen als komplexe Zahl zu verstehen sind,* $\{\ z\ \}\mathsf{R} := \{z \cdot z_R \mid z_R \in R\}$ *und* $\mathsf{R}+\mathsf{S} := \{z_R + z_S \mid z_R \in R, z_S \in \mathsf{S}\}$ *etc.*

Beweis:
Nach dem Kompositionssatz (Satz 81) gilt:

$$\begin{array}{ccc} & \{z\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathsf{R} & (a,d:b) \\ = & \{z\}R & (a,b:c) \end{array}$$

Nach dem Transformationssatz (Satz 78) gilt $\mathsf{R}^{(23)} = \frac{\{z\}}{R}$
Also

$$\begin{array}{ccc} & \{z\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathsf{R}^{(23)} & (a,d:c) \\ = & \frac{\{1\}}{R} & (a,b:c) \end{array}$$

womit $\{ \text{z} \}, \mathsf{R} \looparrowright \{z\}R, \frac{\{z\}}{R}, \{1\} = \frac{\{z\}}{\{z\}}$ gezeigt ist.

Nach dem Transformationssatz (Satz 78) gilt $\{ \text{z} \}^{(321)} = \{1\} - \frac{\{1\}}{\{z\}}$
Also

$$\begin{array}{ccc} & \{z\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \{z\}^{(321)} & (a,d:c) \\ = & \{z\} - \{1\} & (a,b:c) \end{array}$$

womit $\{z\} \looparrowright \{z\} - \{1\}$ gezeigt ist.
Nach dem Transformationssatz (Satz 78) gilt $\{z\}^{(231)} = \frac{\{1\}}{\{1\} - \{z\}}$
Also

$$\begin{array}{ccc} & \{z\} - \{1\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \{z\}^{(231)} & (d,b:c) \\ = & \{-1\} & (a,b:c) \end{array}$$

womit $\{ \text{z} \} \looparrowright \{-1\}$ gezeigt ist.
Daraus folgen die übrigen Relationen:
$\frac{\{z\}}{R} \looparrowright \frac{\{z\}}{R} - \{1\}$
$\mathsf{R}, \frac{\{z\}}{R} - \{1\} \looparrowright \{z\} - R$ (mit der Multiplikation)
$\mathsf{R}\text{-}\{ \text{z} \} = \{\text{-}1\}(\{ \text{z} \}\text{-R})$, $\mathsf{R}+\{ \text{z} \} = \mathsf{R}\text{-}(\{\text{-}1\}\{ \text{z} \})$

$\square$(Arithmetiksatz 114)

Eine wichtige Bedeutung besteht darin, daß mit einer Region auch jede Verschiebung, Drehungstreckung dieser Region erfordert wird, falls die zugehörigen Punktrelationen für Verschiebung und Drehstreckung erfordert werden.

Eine Verallgemeinerung von Punktrelationen auf beliebige Relationen ist der

Korollar 115 (TCI-Abschlusses von Punktkalkülen) *:*
Jede permutations-, kompositions- und schnittvollständige RST-Relationenalgebra $\mathfrak{K}$, die eine singuläre Relation enthält, die nicht Teilmenge einer Diagonalrelation ist, also eine durch $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ repräsentierte, ist unendlich,

insbesondere enthält sie alle durch rationale Polynome über z repräsentierten Relationen.

Beweis:
Nach dem Arithmetiksatz gilt $\{1\} \in \mathfrak{K}^{\ TCI}$, und damit $\{q\}$ für jede rationale Zahl q. Die Behauptung folgt, da jede durch ein $\mathbb{Q}$-Polynom über z repräsentierte Relation durch eine endliche Folge von "Multiplikationen", "Additionen" und "Subtraktionen" von $\{z\}$ und Relationen $\{q\}$ $(q \in \mathbb{Q})$ erfordert wird.

□(Arithmetiksatz 114)

Daraus folgt die Behauptung des Theorems:
Denn da ra $\measuredangle\alpha^{o\,TCI}$ die Relation $\mathit{Midpoint}$=$\{\ 0.5\}$ enthält, enthält sie alle durch Werte $\mathbb{Q} \cdot 0.5 = \mathbb{Q}$ repräsentierten Relationen.

□(Korollar)

Damit ist der Beweis des Theorems komplett.

□(Theorem)

Winkelkalküle, die einen Winkel auszeichnen, erfordern, wie gesehen, schon einen rechten Winkel. Ihr TCI-Abschluß umfaßt also den TCI-Abschluß von $\mathfrak{RC}$. Im folgenden untersuche ich, welche Relationen darin enthalten sind. Sie erweisen sich als außerordentlich ausdrucksstark, wie das folgende Theorem zeigt:

Theorem 116 (TCI-Abschluß von Winkelkalkülen) *:*

Als $\mathbf{A}_2$ ***- Standardrelation*** *bezeichne ich alle Relationen* R*, so daß Reg*R *eine* $\mathbf{A}_2$ *- Gerade, ein* $\mathbf{A}_2$ *- Kreis oder ein* $\mathbf{A}_2$ *-Punkt sind. Somit gilt für jeden Winkel* α*:*$_7$

1. $\measuredangle\alpha^o \ \looparrowright\ \{\mathsf{R} \ — \ \mathsf{R}$ *ist* $\boldsymbol{A}_2$*-Standardrelation* $\}$

2.$\{\ \measuredangle\,]\beta_1{}^o, \beta_2{}^o[\ _{(s;t)}, \measuredangle\,]\beta_1{}^o, \beta_2{}^o]\ _{(s;t)}, \measuredangle\,[\beta_1{}^o, \beta_2{}^o[\ _{(s;t)}, \measuredangle\,[\beta_1{}^o, \beta_2{}^o]\ _{(s;t)}, \mid s, t \in \mathbf{A}_2\}$

Sei $\mathfrak{K}$ ein Winkelkalkül, das irgendeinen speziellen Winkel auszeichnet. Dann enthält $\mathfrak{K}^{\ TCI}$ schon alle $\mathbf{A}_2$-Standardrelationen und alle $\mathbf{A}_2$-Winkelsegmente.

Beweis:

werde, daß $\{rp\}$ sie erfordert.

$\{Perp\} := \{lp, e_{23}, rp\}$ ist die Relation, die genau die Tripel enthält, bei denen der Zielpunkt auf der Senkrechten durch den Referenzpunkt liegt.
$\{ThalesC\} := \{eq,\ e_{23}, orc,\ e_{13},\ olc\}$ ist die Relation, die genau die Tripel enthält, bei denen der Zielpunkt auf dem Thaleskreis durch Start- und Referenzpunkt liegt.
bei $\{Right\} := \{z \mid Imz < 0\} = \{rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb\}$,
$\{Left\} := \{z \mid Imz > 0\} = \{lf, lp, ilc, olc, elc, ll, lb\}$,
$\{NotLeft\} := \{z \mid Imz \leq 0\} = \{rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb\} \cup Line$,
$\{NotRight\} := \{z \mid Imz \geq 0\} = \{lf, lp, ilc, olc, elc, ll, lb\} \cup Line$,
$\{LineEq\} := \{eq, e_{12}\} \cup Line$ ist die Relation, die genau die Tripel enthält, bei denen durch alle drei Punkte eine Gerade gezeichnet werden kann. Im Unterschied zu $Line$ ist auch der Fall Startpunkt=Referenzpunkt möglich.
und zusammenällt.

Wesentlich für den Beweis ist die Tatsache, daß jeder Winkelkalkül die Relationen $\{rp\}$ und $Line$ erfordert. Zunächst zeige ich, daß durch geeignete Komposition eine Relation erfordert wird, die die Richtung des rechten Winkels ignoriert. Dadurch gibt es eine Komposition, die orthogonale Projektion simuliert, und umgekehrt gibt es eine Komposition, die Senkrechte in einem Punkt konstruiert, in dem Sinn, daß die resultierende Relation alle Punkte enthält, die auf der Senkrechten liegen. Da ein Kreis als Thaleskreis über rechte Winkel definiert werden kann, erfordert diese Relation eine Kreisrelation. Eine wichtige Konsequenz aus dieser Kreisrelation ist, daß sie die Relation $LineNotSf$ erfordert und somit die Relation $NotAhead$ topologisch abschließt. Da $LineNotSf$ die Basisrelationen $sb,\ e_{13},\ sc,\ e_{23},\ sf$ des Linienkalküls alle bis auf eine enthält, erfordert sie durch Permutation und Komposition alle anderen Relationen mit dieser Eigenschaft und somit durch Schnitt alle komplexen Relationen des Linienkalküls. Diese Abschnittsrelationen gehen in den Beweis ein, indem sie für einige Relationen ihr topologisch Inneres, Äußeres etc. erfordern.
Schließlich zeige ich, daß unter Ausnutzung von $\{ll\}$ x auch seine Quadratwurzeln erfordert, außerdem lassen sich Werte von einer Koordinate auf die andere kopieren, und damit ist es möglich, mit singulären Relationen wie mit Zahlen zu "rechnen", wodurch somit alle $\mathbf{A}_2$ - Punkte erfordert werden.
Schließlich wird der Beweis komplettiert, indem ich zeige, daß die rechter-Winkel-Relation zusammen mit der Gesamtheit der $\mathbf{A}_2$ - Punkte jede $\mathbf{A}_2$ - Gerade erfordert, und damit $\mathbf{A}_2$ - Halbebenenen, und daß jeder $\mathbf{A}_2$ - Kreis Kompositionen von einem $\mathbf{A}_2$ - Punkt und einem speziellen Kreis ist.

Lemma 117 (Thaleslemma) *:*
$\{rp\} \looparrowright Perp,\ ThalesC$

Beweis:
Offensichtlich gilt

$$\begin{array}{rll} & \{\mathit{rp}\ \} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathit{Line} & (d,b:c) \\ = & \mathit{Perp} & (a,b:c) \end{array}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{array}{rll} & \mathit{Line} & (a,d:c) \\ {}_2\diamond_1 & \mathit{Perp}^{(23)} & (d,b:c) \\ = & \mathit{ThalesC} & (a,b:c) \end{array}$$

denn in jeder Instantiation der linken Seite gilt $d^\theta \neq c^\theta$ und b^θ liegt auf der Senkrechten zu $\ell(d^\theta, c^\theta)$ durch c^θ. Da auch a^θ auf $\ell(d^\theta, c^\theta)$ liegt, ist entweder $a^\theta = c^\theta$ oder b^θ liegt auf der Senkrechten zu $\ell(a^\theta, c^\theta)$ durch c^θ, folglich liegt c^θ auf dem Thaleskreis durch a, b.
Umgekehrt, zu jeder Realisation von *ThalesC* mit $c^\theta \neq a^\theta$ ist $d^\theta = a^\theta$ konsistente Erweiterung, ansonsten falls $a^\theta \neq b^\theta$, ist jede Instantiation d^θ auf der Senkrechten zu $\ell(b^\theta, c^\theta)$ durch c^θ, mit der linken Seite konsistent, und ansonsten ist $d^\theta \neq a^\theta = b^\theta = c^\theta$ konsistente Erweiterung.

□(Thaleslemma 117)

Damit ist eine Relation im TCI-Abschluß, die beliebige rechte Winkel, ausgeartete eingeschlossen, repräsentiert. Diese Tatsache ist wichtiger Bestandteil des Beweises im Theorem, weil nun einige Relationen, die zur Beschreibung von Halbebenen wichtig werden, erfordert werden. Insbesondere ermöglicht die Relation *Notsf*, daß abgeschlossene Halbebenen erfordert werden.

Lemma 118 (Seitenlemma) *:*
$\mathit{rp} \looparrowright \mathit{Right}, \mathit{Left}, \mathit{LineNotSf}, \mathit{NotForw}, \mathit{NotLeft}, \mathit{NotRight}$

Beweis:
Offensichtlich

$$\begin{array}{rll} & \mathit{rp} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{Perp} & (b,d:c) \\ = & \mathit{Right} & (a,b:c) \end{array}$$

$\mathit{rp} \looparrowright \mathit{LineNotSf}$ folgt, denn es gilt die **Behauptung:**

$$\begin{array}{rll} & \mathit{Right} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathit{ThalesC}^{(12)} & (d,b:c) \\ \cap & \mathit{Line} & (a,b:c) \\ = & \mathit{LineNotSf} & (a,b:c) \end{array}$$

Zu zeigen ist: Für jede Instantiation der Elemente a, b, c mit Punkten der Ebene gilt: $a^\theta, b^\theta, c^\theta$ ist genau dann durch einen Punkt d^θ zu einem Modell

der Relationen auf der linken Seite erweiterbar, wenn sie $\mathit{LineNotSf}\ (a, b : c)$ realisiert.
Realsiere die Instantiation das Constraint $\{\ \mathit{LineNotSf}\ \}(a, b : c)$

1. Fall: $b^\theta = c^\theta$. Dann ist $d^\theta = a^\theta$ konsistente Erweiterung

2. Fall: $b^\theta \neq c^\theta$. Dann ist $d^\theta = c^\theta$ konsistente Erweiterung Angenommen, die Instantiation $a^\theta, b^\theta, c^\theta$ realisert $\{\ \mathit{LineNotSf}\ \}(a, b : c)$ nicht, aber es gäbe eine mit der linken Seite konsistente Erweiterung d^θ. Da $\mathit{Line}\ (a, b : c)$ realisiert würde, aber nicht $\mathit{LineNotSf}\ (a, b : c)$, galte also $\{\ \mathit{sf}\ \}(a, b : c)$. Weil nun $\{\ \mathit{NotAhead}\ \}(a, b : d)$ gälte, folgte $\{\ \mathit{sb}\ \}(b, d : c)$, was aber $\mathit{ThalesC}\ (b, d : c)$ widerspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen.
$\mathit{rp} \looparrowright \mathit{NotForw}$ folgt wegen

$$\begin{array}{ccc} & \mathit{LineNotSf} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{Perp} & (a, d : c) \\ = & \mathit{NotForw} & (a, b : c) \end{array}$$

$\mathit{rp} \looparrowright \mathit{NotLeft}$ folgt wegen

$$\begin{array}{ccc} & \mathit{Right} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathit{NotForw} & (d, b : c) \\ \cap & \mathit{Line} & (a, b : c) \\ = & \mathit{NotLeft} & (a, b : c) \end{array}$$

Schließlich $\mathit{Right},\ \mathit{NotLeft} \looparrowright \mathit{Left},\ \mathit{NotRight}$, denn $\mathit{Left}{=}\mathit{Right}^{(12)}$ und denn $\mathit{NotRight}{=}\mathit{NotLeft}^{(12)}$ nach dem Tranformationssatz 78.

$\square$(Seitenlemma 118)

Aus dem folgenden wichtigen Lemma folgt, daß man jede Kombination der Relationen $\mathit{sb}, e_{13},\ \mathit{sc}, e_{23},\ \mathit{sf}$ im ^{TCI}-Abschluß eines Kalküls findet, das $\mathit{LineNotSf}$ erfordert, also beispielsweise jedes Winkelkalkül. Aus diesem Lemma folgt beispielsweise, daß zu jeder Geraden auch die durch sie definierten Halbebenen erfordert werden.

Lemma 119 (Abschnittslemma) *:*
$\{\ \mathit{LineNotSf}\ \} \looparrowright \mathfrak{P}(\{\ \mathit{sb}, e_{13}, \mathit{sc}, e_{23}, \mathit{sf}\ \})$.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} & \mathit{LineNotSf} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathit{LineNotSf} & (d, b : c) \\ = & \mathit{Line} & (a, b : c) \end{array}$$

Denn in jeder Realisierung der linken Seite ist $a^\theta \neq b^\theta$ und $a^\theta, b^\theta, c^\theta$ und d^θ liegen auf einer Geraden. Umgekehrt findet sich zu jeder Realisierung der rechten Seite ein Punkt d^θ, der mit der linken Seite konsistent ist. Nämlich, falls $b^\theta = c^\theta$, wähle d^θ zwischen b^θ und c^θ, sonst $d^\theta = b^\theta$.
Also $\mathsf{LineNotsf} \looparrowright \mathsf{Line}$ und $\mathsf{Line} \looparrowright \mathsf{Line}\backslash\{e_{23}\} = \{sb, e_{13}, sc, sf\} = \mathsf{Line} \cap \mathsf{Line}^{(23)}$, denn $\{e_{12}\}^{(23)} = \{e_{23}\}$.
Sei $\mathsf{R}{=}(\{sb, e_{13}, sc, e_{23}, sf\}\backslash\bigcup_{i\in I} \underline{b}_i)$ ($\underline{b}_i \in \{\{sb\}, \{e_{13}\}, \{sc\}, \{e_{23}\}, \{sf\}$ eine der Basisrelationen aus Line).
Jede Relation $(\mathsf{Line} \setminus \underline{b}_i)$ ist eine Permutation von $\mathsf{LineNotsf}$ oder von $\mathsf{Line}\setminus \{e_{23}\}$. Daher ist $\mathsf{R}{=}\bigcap_{i\in I}(\mathsf{Line} \setminus \underline{b}_i) \in \mathsf{LineNotsf}^{TCI}$ als Schnitt von Relationen aus $\mathsf{LineNotsf}^{TCI}$.

$\square$(Abschnittslemma 119)

Eine weitere elementare Folgerung aus dem Thaleslemma ist, daß mit einem Punkt auch die Projektionen des Punktes auf die reelle und imaginäre Achse im TCI-Abschluß enthalten ist. In gewissem Sinn eine Umkehrung der Relation Perp liefert das folgende Lemma.

Lemma 120 (Projektionslemma) *:*
$\mathsf{R}, \{rp\} \looparrowright \{\Re(\mathsf{R})\}, \{\imath\,\Im(\mathsf{R})\}, \{\imath\,\mathsf{R}\}, \{\Im(\mathsf{R})\}$, *wobei* $\Re(\mathsf{R}) := \{\Re(z) \mid z \in \mathsf{R}\}$ *etc. R ist dabei als die Region der Relation* R *bei Repräsentation durch komplexe Zahlen zu verstehen.*

Beweis:
Nach dem Linienlemma 109 gilt $\{rp\} \looparrowright \mathsf{Line}$, und nach dem Winkelhalbierungslemma $\{rp\} \looparrowright \measuredangle 45^o$. Nun gilt offenbar

$$\begin{array}{rcl} & \mathsf{R} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathsf{ThalesC} & (a,d:c) \\ \cap & \mathsf{Line} & (a,b:c) \\ = & \{\Re(\mathsf{R})\} & (a,b:c) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} & \mathsf{R} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathsf{ThalesC} & (a,d:c) \\ \cap & \{ll\} & (a,b:c) \\ = & \{-\imath\cdot\Im(\mathsf{R})\} & (a,b:c) \end{array}$$

denn durch $\mathsf{ThalesC}$ wird genau die rechtwinklige Projektion definiert Also $\mathsf{R}, \{rp\} \looparrowright \{\Re(\mathsf{R})\}, \{-\imath\,\Im(\mathsf{R})\}$ Wegen $\measuredangle 45^o \cap \{rl\} = \{-\imath\}$, folgt mit dem Arithmetiksatz, daß $rp \looparrowright \imath$ und damit

$\mathsf{R}, \{rp\} \looparrowright \{-\imath\cdot\imath\cdot\Im(\mathsf{R})\}$.

$\Box$(Abschnittslemma 119)

Auf reelle Koordinaten übertragen, bedeutet dies, daß mit einer Relation auch ihre Projektion auf die Achsen im TCI-Abschluß enthalten sind. Angewandt auf Punktrelationen ergibt sich, daß auch die Koordinaten eines Punktes im TCI-Abschluß enthalten sind.

Lemma 121 (Wurzellemma) *:*
Für $x \in \mathbb{R}^+$ *gilt:* $\{x\}, \{rp\} \looparrowright \{\sqrt{x}\}$,
wobei $\{x\}$ *als Repräsentation der Relationen als komplexe Zahl zu verstehen ist.*

Beweis:
Nach dem Arithmetiksatz gilt: $x \looparrowright -x$. Weiterhin

$$\begin{array}{ccc} & \{-x\} & (a, b : d) \\ {}_3\diamond_1 & ThalesC & (d, b : c) \\ \cap & ll & (a, b : c) \\ = & \{\imath\sqrt{x}\} & (a, b : c) \end{array}$$

, denn in jeder Realisierung der Relationen der linken Seite ist $a^\theta c^\theta$ die Höhe im rechtwinkigen Dreieck $\Delta a^\theta b^\theta c^\theta$. Nach dem Höhensatz folgt

$$dist(a^\theta, c^\theta)^2 = dist(a^\theta, b^\theta)\cdot$$

Da $\{x\}$ RST-Relation ist, kann nach Eichung $a^\theta = (0; 0), b^\theta = (1; 0), dist(a^\theta, d^\theta,) = x$ angenommen werden, und dann ist wegen $\{\ c\ \}(ll, a : b)$ $c^\theta = (0; \sqrt{x})$. Umgekehrt vervollständigt der Punkt $d^\theta = (-x; 0)$ die geeichte Realisation von $\{\ c\ \}(\imath\sqrt{x}, a : b)$.
Weiterhin gilt nach dem Projektionslemma 120 $\{rp\}, \{x\} \looparrowright \{\sqrt{x}\}$.

$\Box$(Wurzellemma 121)

Korollar 122 (Betragslemma) *:*
$\{z\} \looparrowright \{|z|\}$

Beweis:
$|z| = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}$
Mit dem Arithmetiksatz und dem Wurzellemma folgt die Aussage.

$\Box$(Betragslemma 122)

Lemma 123 (Koordinatenlemma) *:*
$\{x\}, \{y\} \looparrowright (x; y)$

Beweis:
Falls $z \neq 0$, bezeichnet

$$\begin{array}{ccc} & \{z\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{Perp} & (d,b:c) \\ = & \{z^*\} & (a,b:c) \end{array}$$

die Relation, die repräsentiert wird durch die Senkrechte zu $\ell(0,z)$ durch z. Insbesondere, falls z auf der reellen Achse liegt, wird z^* repräsentiert durch die Gerade $Rec = |z|$, falls z auf der imaginären Achse liegt, wird z^* repräsentiert durch die Gerade $\Im(c) = |z|$ Nun wird also offensichtlich $\{x*\} \cap \{(\imath\, y)*\} = \{x + \imath\, y\} = \{(x; y)\}$ von $\{\{x\}, \{y\}\}$ erfordert.

□(Koordinatenlemma 123)

Lemma 124 (Äquidistanzlemma) *:*
$\{rp\} \looparrowright \mathit{Equilat}$
, wobei $\mathit{Equilat} := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid \ dist(a,b) = \ dist(b,c) > 0\}$

Beweis:
Nach dem Symmetrielemma 110 gilt $rp \looparrowright \mathit{Midpoint}$, und nach dem Thaleslemma $rp \looparrowright \mathit{ThalesC}$. Es gilt

$$\begin{array}{ccc} & \mathit{Midpoint}(23) & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{ThalesC} & (a,d:c) \\ = & \mathit{EquiDist} & (a,b:c) \end{array}$$

denn in jeder Realisation der Relationen auf der linken Seite gilt

$$0 < \ dist(a^\theta, b^\theta) = \frac{dist(a^\theta, d^\theta)}{2} = \ dist(b^\theta, c^\theta),$$

und umgekehrt existiert zu jeder Realisation von $\mathit{ThalesC}$ liefert die Instantiation von Punkt d als Schittpunkt von $\ell(a^\theta, b^\theta)$ mit dem Kreis um b^θ mit Radius $dist(a^\theta, b^\theta)$ eine mit der linken Seitekonsistente Erweiterung.

□(Äquidistanzlemma 124)

In allen geeichten Tripeln $((0;0),(1;0),c^\theta)$, die in der Relation $\mathit{Equilat}$ stehen, liegt c auf dem Kreis um $(1;0)$ mit Radius 1. $\{rp\}$ erfordert also eine $\mathbf{A}_2$-Kreisrelation. Ein erster Schritt auf dem Weg zu zeigen, daß $\{rp\}$ jede $\mathbf{A}_2$-Kreisrelation erfordert, besteht darin, zu zeigen, daß jeder Radius möglich ist:

Lemma 125 (Kreise) *:*
Für jedes $0 < r \in \mathbf{A}_2$ *gilt:*
$rp \looparrowright \mathsf{Ratio} = r,\ \mathsf{Ratio} < r,\ \mathsf{Ratio} \leq r,\ \mathsf{Ratio} > r,\ \mathsf{Ratio} \geq r,\ \mathsf{Ratio} \neq r$ *, wobei*

$$\begin{array}{ll} \{\ \mathsf{Ratio} = r\} & := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid\ dist(b,c) = r\ dist(a,b) > 0\}, \\ \{\ \mathsf{Ratio} < r\} & := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid\ dist(b,c) < r\ dist(a,b) > 0\} \\ \{\ \mathsf{Ratio} \leq r\} & := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid\ dist(b,c) \leq r\ dist(a,b) > 0\} \\ \{\ \mathsf{Ratio} > r\} & := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid\ dist(b,c) > r\ dist(a,b) > 0\} \\ \{\ \mathsf{Ratio} \geq r\} & := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid\ dist(b,c) \geq r\ dist(a,b) > 0\} \\ \{\ \mathsf{Ratio} \neq r\} & := \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid\ dist(b,c) \neq r\ dist(a,b) > 0\} \end{array}$$

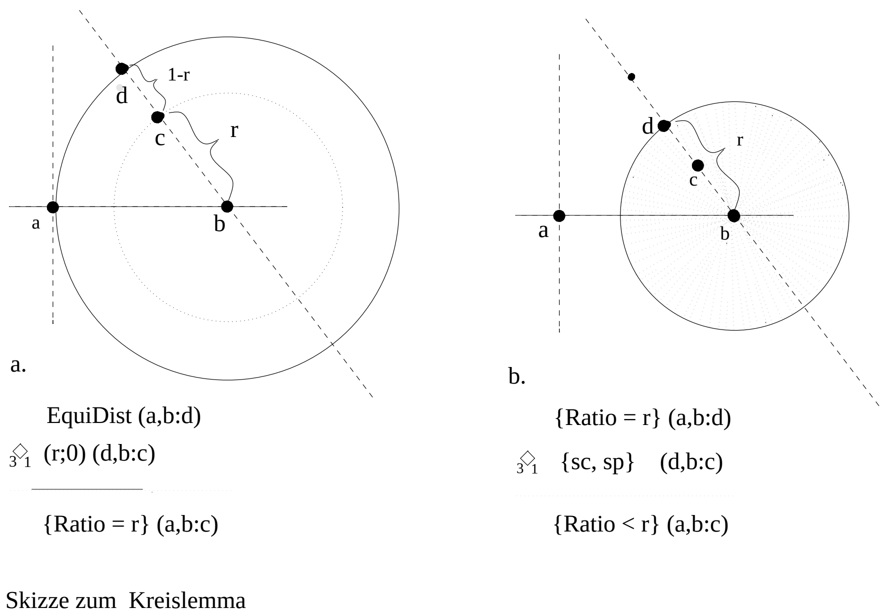


Abbildung 6.4: Skizze zum Beweis des Lemmas 121 Kreise

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Equidist} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{1-r\} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{Ratio} = r & (a,b:c) \end{array}$$

Denn genau dann, wenn zu $(a^\theta, b^\theta, c^\theta)$ eine mit der linken Seite konsistente Fortsetzung, also ein Punkt d^θ auf $\ell(b^\theta, c^\theta)$ mit $dist(b^\theta, d^\theta) = dist(a^\theta, b^\theta)$ existiert, dann gilt $dist(d^\theta, c^\theta) = (1-r)\ dist(d^\theta, b^\theta)$, also $dist(b^\theta, c^\theta) = r\ dist(b^\theta, d^\theta) = r\ dist(a^\theta, b^\theta).(Vgl. Abbildung 6.4a.)$
Weiterhin lassen sich nun die Relationen mit den Distanzungleichungen als

Komposition mit geeigneten Streckenabschnitten ausdrücken, die nach dem Abschnittslemma 119 erfordert werden.

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Ratio} = r & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{\mathsf{e}_{13}, \mathsf{sc}\} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{Ratio} < r & (a,b:c) \end{array}$$

Denn genau dann, wenn zu $(a^\theta, b^\theta, c^\theta)$ eine mit der linken Seite konsistente Fortsetzung exisitiert, also ein Punkt d^θ, so daß c^θ zwischen b^θ und d^θ) liegt und $dist(b^\theta, d^\theta) = r\, dist(a^\theta, b^\theta)$, dann gilt $dist(b^\theta, c^\theta) < dist(b^\theta, d^\theta) = r\, dist(a^\theta, b^\theta).(Vgl.Abbildung 6.4b.)$
Ganz analog erhält man

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Equidist} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{\mathsf{e}_{13}, \mathsf{sc}, \mathsf{e}_{23}\} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{Ratio} \leq r & (a,b:c) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Equidist} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{\mathsf{sf}\} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{Ratio} > r & (a,b:c) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Equidist} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{\mathsf{e}_{23}, \mathsf{sf}\} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{Ratio} \geq r & (a,b:c) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Equidist} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \{\mathsf{e}_{13}, \mathsf{sc}, \mathsf{sf}\} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{Ratio} \neq r & (a,b:c) \end{array}$$

□(Lemma 125)

Damit ist alles an Vorbereitungen gezeigt, um nun den entscheidenden Satz zu beweisen, der beschreibt, wie die Relationen aussehen, die im Abschluß eines Winkelkalküls enthalten sind.

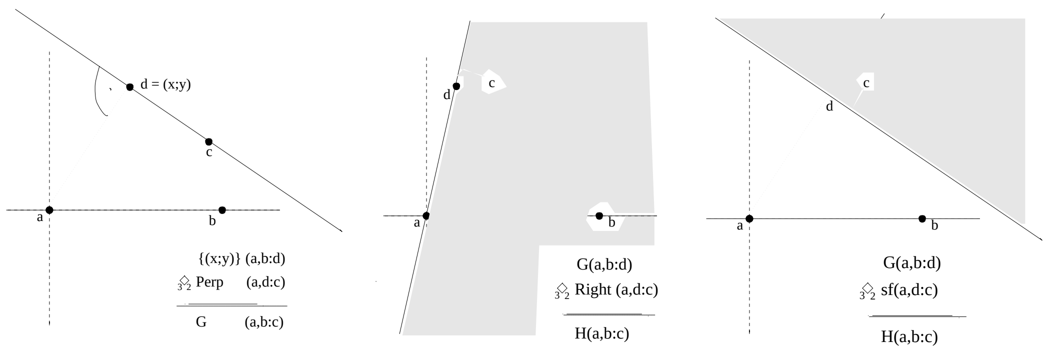
Satz 126 (Hauptsatz der Winkelkalküle) *:*
Sei $\mathfrak{K}$ ein Winkelkalkül, das irgendeinen speziellen Winkel auszeichnet. Dann enthält $\mathfrak{K}^{TCI}$ schon alle $\mathbf{A}_2$ - Standardrelationen.

Beweis:

Vorbemerkung: Wegen des Symmetrielemmas 110 erfordert $\mathfrak{K}$ die Relationen

$\{\mathit{rp}\}$ und $\{\mathit{Midpoint}\}$, und damit nach dem Arithmetik- und Wurzellemma jede Relation $\{a\}$, wobei $a \in \mathbf{A}_2$.
Darauf aufbauend zeige ich zunächst, daß $\mathbf{A}_2$ - Punktrelationen, $\mathbf{A}_2$ - Geradenrelationen und $\mathbf{A}_2$ - Halbebenenrelationen erfordert werden.

1. <u>$\mathbf{A}_2$ - Punktrelationen:</u>
Sei $\{(x;y)\}$ eine $\mathbf{A}_2$ - Punktrelation. Falls $y = 0$, so wird $\{(x;y)\} = \{x\}$ nach Vorbemerkung erfordert. Falls $x = 0$, so wird $\{(x;y)\} = \{\imath\, y\}$ nach Projektionslemma 120 erfordert. Ansonsten folgt die Behauptung mit dem Koordinatenlemma.



a. Geraden werden in Winkelkalkülen erfordert. b, c. Halbebenen werden in Winkelkalkülen erfordert, Beweisskizze (2 Fälle)

Abbildung 6.5: Skizze zum Beweis des Hauptsatzes

2. <u>$\mathbf{A}_2$ - Geradenrelationen:</u>
Falls $c = 0$, wird G durch eine Ursprungsgerade repräsentiert wird, dann enthält G den $\mathbf{A}_2$ - Punkt $\{(b;-a)\}$ G wird dann erfordert, denn $\{(b;-a)\}$ wird erfordert, und

$$\begin{array}{ccc} & \{(b;-a)\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{Line} & (a,d:c) \\ = & \mathsf{G} & (a,b:c) \end{array}$$

Andernfalls ist $p = (\frac{ca}{a^2+b^2}, \frac{cb}{a^2+b^2}) \neq (0;0)$ der Lotpunkt von $(0;0)$ auf die zugehörige Gerade, wie man leicht nachrechnet, d. h. $\mathsf{G}{=}p*$. Offenbar ist p $\mathbf{A}_2$ - Punkt. Also wird die von ihm repräsentierte Relation erfordert, und damit nach dem Koordinatenlemma G.(vgl. Abbildung 6.5a.)
Sei $\mathsf{H}{=} \{(x;y) \mid ax + by < c; a,b,c \in \mathbf{A}_2\}$ eine offene Halbebenenrelation. Sei $\mathsf{G}{=} \partial\mathsf{H} = \{(x;y) \mid ax + by = c, a,b,c \in \mathbf{A}_2\}$ die zugehörige Geradenrelation. Falls $c = 0$, wird H durch eine Ursprungsgerade "begrenzt", dann enthält H

den $\mathbf{A}_2$ - Punkt H wird dann erfordert, denn $\{(b; -a)\}$ wird erfordert, und

$$\begin{array}{ccc} & \{(b;-a)\} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{Right} & (a,d:c) \\ = & \mathsf{H} & (a,b:c) \end{array}$$

Denn nach der arithmetischen Definition von Right (vgl. Kapitel 4: konvexes Kalkül), gilt nach Eichung auf $a^\theta = (0;0) d^\theta = (b; -a)$, daß $\mathit{Right}\ (a,d:c) \Leftrightarrow \Omega = (b-0)y + (a-0)x < 0$. Andernfalls ist $p = (\frac{ca}{a^2+b^2}, \frac{cb}{a^2+b^2}) \neq (0;0)$ wieder der Lotpunkt von $(0;0)$ auf die zugehörige Gerade. Falls $c < 0$, also $(0;0)$ nicht in H,dann

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{G} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \{sf\} & (a,d:c) \\ = & \mathsf{H} & (a,b:c) \end{array}$$

. Denn für Realisationen der linken Seite gilt, daß a^θ und c^θ auf verschiedenen Seiten von G liegen, also ist $c^\theta \in H$. Umgekehrt existiert für jeden Punkt $c^\theta \in H$ der Schnittpunkt von $\ell(a^\theta, c^\theta)$ mit der Geraden G, d^θ, der eine mit der linken Seite konsistente Erweiterung darstellt. Andernfalls

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{G} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathit{NotAhead} & (a,x:c) \\ = & \mathsf{H} & (a,b:c) \end{array}$$

aufgrund analoger Überlegungen.(vgl. Abbildung 6.5c.)
Falls $\mathsf{H} = \{(x;y) \mid ax + by \leq c; a,b,c \in \mathbf{A}_2\}$ eine abgeschlossene Halbebenenrelation ist, nutze die jeweils abgeschlossenen Relationen *NotLeft* statt *Right*, $\{e_{23},\ sf\}$ statt $\{sf\}$ bzw. *LineNotSf* statt *NotAhead*. Da nach Linienlemma 109 und Seitenlemma 118 *Right*, $\{sf\}$, *NotAhead*, *NotLeft*, $\{e_{23},\ sf\}$ und *LineNotSf* erfordert werden, wird in jedem Fall H erfordert.

4. <u>$\mathbf{A}_2$ - Kreisrelationen, $\mathbf{A}_2$ - Kreisscheibenrelationen:</u>
Sei K repräsentiert durch einen $\mathbf{A}_2$ - Kreis k mit Radius $= r$ um (0;0). Dann ist nach dem Transforamtionssatz $K = (Ratio = r)^{(12)}$.
Sei K repräsentiert durch einen $\mathbf{A}_2$ - Kreis k mit Radius $= r$ um (x;y). Da $\{z\} = \{x + \imath y\}$ eine $\mathbf{A}_2$ - Punktrelation ist, wird $\{z\}$ erfordert. Nach dem Kompositionssatz (Satz 81) ist

$$\begin{array}{ccc} & \mathit{Ratio} = \frac{r}{|z|} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \{z\} & (a,d:c) \\ = & \mathsf{K} & (a,b:c) \end{array}$$

.

Für $\mathbf{A}_2$ - Kreisscheibenrelationen und ihre Komplemente funktioniert der Beweis analog, nur daß die Relationen $\mathit{Ratio} < r)$, $\mathit{Ratio} \leq r$, $\mathit{Ratio} > r$, $\mathit{Ratio} \geq$

r statt $\mathit{Ratio}{=}\,r$ benutzt werden.

5. $\mathbf{A}_2$ - Winkelrelationen:
Sei $W = \measuredangle\,]\alpha^o, \beta^o]_{\,(s;t)} := \{s + (r\cos\gamma; t + r\sin\gamma) \mid r \in \mathbb{R}^+, \gamma \in\ ]\alpha^o, \beta^o]\,\}$, wobei $\alpha, beta\mathbf{A}_2$-Winkel sind und der Scheitelpunkt $(s;t)$ ein $\mathbf{A}_2$ - Punkt. Falls $\beta - \alpha < 180$ ist die zugehörige Region Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Halbebene, die von $\mathbf{A}_2$ - Geraden begrenzt werden.
Ansonsten wird es etwas komplizierter: Sei $\phi = \tan^{-1}(\frac{t}{s})$ der Winkel, den $\ell((0;0),(s;t))$ mit $\ell((0;0),(0;1))$ bildet, $\alpha_\phi := (180{+}\alpha{-}\phi)$, $\beta_\phi := (180{+}\beta{-}\phi)$. Dann ist W nach dem Kompositionssatz (Satz 81)

$$\begin{array}{ccc} & \measuredangle\,]{\alpha_\phi}^o, (\beta_\phi)^o] & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \{(s;t)\} & (a,d:c) \\ = & \measuredangle\,]\alpha^o, \beta^o]_{\,(s;t)} & (a,b:c) \end{array}$$

. Es genügt also zu zeigen, daß $\measuredangle\,]{\alpha_\phi}^o, (\beta_\phi)^o]$ erfordert wird. Da die $\mathbf{A}_2$-Winkel dicht liegen, existiert ein $\mathbf{A}_2$ - Winkel γ_ϕ mit $\alpha_\phi < \gamma_\phi < \beta_\phi \mod 360$ (wobei $\gamma < \beta \mod 360$ bedeute, daß es eine ganze Zahl k gibt, so daß $k\beta - \gamma < 180 = \frac{360}{2}$), so daß $\measuredangle\,]{\alpha_\phi}^o, (\gamma_\phi)^o]$ und $\measuredangle\,]0^o, (\beta_\phi{-}\gamma_\phi)^o]$ jeweils als Schnitt von zwei Halbebenenrelationen erfordert werden und somit auch die sich nach dem Winkeladditionslemma 105 ergebende Relation nun.

$$\begin{array}{ccc} & \measuredangle\,]{\alpha_\phi}^o, (\gamma_\phi)^o] & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \measuredangle\,]0^o, (\beta_\phi{-}\gamma_\phi)^o] & (a,d:c) \\ = & \measuredangle\,]{\alpha_\phi}^o, (\beta_\phi)^o] & (a,b:c) \end{array}$$

□(Satz)

Die Vervollständigung dieses TCI-Abschlusses ist zwar unendlich, doch immerhin permutations- und kompositionsvollständig. Sie ist wie gesehen sehr ausdrucksstark und somit ein Kalkül mit den Eigenschaften 2. bis 5. aus Abschnitt 2.6. Jedoch zurück zur ursprünglichen Frage: Ist er ein JEPD-Kalkül? Da für jeden Winkel α die Menge der Relationen in $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ abzählbar ist, es aber $2^{\aleph_0}$ viele Winkel gibt, die nicht alle im TCI-Abschluß von abzählbar vielen anderen liegen können, gibt esüberabzählbar viele verschiedene permutations- und kompostionsvollständige Winkelkalküle.

Satz 127 ($(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ hat keine Basis) *:*
Für jeden Winkel α gilt: Der zugehörige Winkelkalkül $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ besitzt keine Basis.

Beweis:
Ich führe die Annahme, daß $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ eine Basis hat, zum Widerspruch.

Zunächst stelle ich fest, daß keine Region einer Basisrelation Bvon $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ mehr als einen Punkt enthalten kann. Denn sonst existiert eine $\mathbf{A}_2$-Gerade g, die zwei offene Halbebenen H_1, H_2 begrenzt, so daß für $i = 1, 2 : (H_i \cap Reg\mathsf{B}) \neq \emptyset$.
Sei $Reg\mathsf{R}_0 = g \cap Reg\mathsf{B}, \quad Reg\mathsf{R}_i = H_i \cap Reg\mathsf{B}\,(i \in \{1,2\})$ Da $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ abgeschlossen unter Schnitten ist und nach dem Hauptsatz über Winkelkalküle jede Relation, die durch eine von einer $\mathbf{A}_2$-Gerade begrenzten Region repräsentiert wird, in $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ enthalten ist, gilt $\mathsf{R}_i \in (\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$(für $i \in \{0,1,2\}$) und die Basisrelationen $\mathsf{B}_{ij_i}, \; j_i \in J_i$ erzeugen $\mathsf{R}_i (i \in \{0,1,2\})$, wobei $J_1, J_2 \neq \emptyset$. Also wird B durch $\bigcup_{i \in \{0,1,2\}, j_i \in J_i} \mathsf{B}_{ij_i}$ erzeugt, im Widerspruch zur Minimalität.
Da $(\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ nur $\aleph_0$ viele Relationen hat, ist auch $|\mathcal{B}((\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI})| \leq \aleph_0$. Daher ist aber $\mathsf{Line} \in (\mathfrak{K}_{\alpha^o})^{TCI}$ nicht erzeugbar, denn $\mathbb{R} = Reg\mathsf{Line}$ ist überabzählbar.

□(Satz 127)

Es gibt also kein Winkelkalkül und damit keine Verfeinerung von $\mathfrak{SC}$, das den Kriterien 1.-4. aus Abschnitt 2.6 genügt, und überabzählbar viele Beispiele für Kalküle ohne Basis. Wenn man mit RST-Kalkülen, in denen Winkel definierbar sind, arbeiten will, und ihre Ausdrucksmächtigkeit spricht dafür, dann muß man also auf Permutationsvollständigkeit oder Kompositionsvollständigkeit verzichten, und auf einer Verfeinerungsstufe $\mathfrak{K}^{TCI(t)}$ abbrechen, auf der man t-mal ohne Informationsverlust mittels Kompostion und Permutation ableiten kann. JEPD($\mathfrak{SC}$) und $\mathfrak{RC}$ sind die einfachsten Kalküle dieser Art, wobei ich $\mathfrak{RC}$ vorziehen würde, weil nach dem Konvertierungssatz **??**, Punkt 2. in $\mathfrak{SC}$ nur eine vollständige Kompostion existiert, aber seine Einbettung in eine Relationenalgebra auch nicht kompositionsvollständig ist. [2]

6.2 Sonderstellung von $\mathfrak{RC}$

Eine Besonderheit von $\mathfrak{RC}$, ist, daß schon der ^{TCI}-Abschluß des Basiskalküls, das vollständige Kalkül umfaßt, obwohl der ^{TCI}-Abschluß nicht unbedingt abgeschlossen unter Vereinigung sein muß. Dazu benötige ich zunächst ein paar Lemmata, die zeigen, daß die Vereinigung mit den Punktrelationen $\{\mathsf{e}_{12}\}$, $\{\mathsf{e}_{13}$ $\}$ und $\{\mathsf{e}_{23}$ $\}$ erfordert wird.

Lemma 128 (Or-Lemma) *:*
$\mathsf{rp} \not\hookrightarrow \mathsf{LinEq}, \mathsf{Or}$

[2]Erst $\mathfrak{SC}^{\;TCI(1)}$ hat diese Eigenschaft.

Beweis:
Behauptung:

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Perp}^{(31)} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_1 & \mathsf{Perp} & (d,b:c) \\ = & \mathsf{LinEq} & (a,b:c) \end{array}$$

Es ist zu zeigen, daß Für jede Instantiation der Elemente a, b, c mit Punkten der Ebene gilt: $a^\theta, b^\theta, c^\theta$ ist genau dann durch einen Punkt d^θ zu einem Modell der Relationen auf der linken Seite erweiterbar, wenn sie $\mathsf{LineEq}\ (a,b:c)$ realisiert.

Realsiere die Instantiation das Constraint $\{\ \mathsf{LinEq}\ \}(a,b:c)$

1. Fall: $a^\theta = b^\theta = c^\theta$. Dann ist jeder Punkt $d^\theta \neq b^\theta$ konsistente Erweiterung.

2. Fall: Es gibt eine ausgezeichnete Gerade, auf der a^θ, b^θundc^θ liegen. Dann ist jeder Punkt d^θ auf der Senkrechten zu dieser Geraden durch b^θ eine konsistente Erweiterung. Angenommen, die Instantiation $a^\theta, b^\theta, c^\theta$ realisert $\{\ \mathsf{LinEq}\ \}(a,b:c)$ nicht, aber es gäbe eine mit der linken Seite konsistente Erweiterung

d^θ. Dann exisiteren zwei Geraden $\ell(a^\theta, b^\theta)$ und $\ell(b^\theta, c^\theta)$, die sich in b^θ schneiden. Es müßte nun $d^\theta \neq b^\theta$ auf beiden Senkrechten durch b^θ liegen, aber b^θ ist ihr einziger Schnittpunkt. Widerspruch.

$\square$(Beh.)

Also folgt $rp \looparrowright \mathsf{LinEq}$. Weil $\mathsf{Or}= \mathsf{Lineq} \cap \mathsf{ThalesC}$, gilt schließlich $\{rp\} \looparrowright \mathsf{Or}$

$\square$(Lemma 128)

Lemma 129 (Punktierungslemma) *:*
1. $\mathsf{R},\ \mathsf{Or} \looparrowright \mathsf{R} \cup\ \{e_{12}\}$
2. Für jede Punktrelation $\{\ z\ \}$ *gilt:* $\mathsf{R},\ \{\ z\ \},\ Or \looparrowright R \cup \{z\}$
3. $\mathsf{R},\ \mathsf{Or} \looparrowright \mathsf{R} \cup\ \{e_{12},\ e_{13}, eq\}$

Beweis:
1.

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Or}^{(23)} & (a,b:d) \\ {}_3\diamond_2 & \mathsf{R}^{\ (23)} & (a,d:c) \\ = & \mathsf{R} \cup \{\ e_{12}\} & (a,b:c) \end{array}$$

$\square$(1.)

2. Wegen $\mathsf{R}^{(13)} = \{e_{12}\}$, gilt

$$(\mathsf{R}^{(13)} \cup \{e_{12}\})^{(13)} = \mathsf{R} \cup \{1\}.$$

Also $\mathsf{R} \looparrowright \mathsf{R}^{(13)} \looparrowright \mathsf{R}^{(13)} \cup \{e_{12}\} \looparrowright \mathsf{R} \cup \{1\}$. Nach dem Arithmetiksatz gilt $\mathsf{R}, \{z\} \looparrowright \frac{1}{c}\mathsf{R} \looparrowright \frac{1}{c}\mathsf{R} \cup \{1\} \looparrowright \mathsf{R} \cup \{z\}$

$\square$(2.)

3.

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Or} & (a, d : c) \\ {}_2\diamond_3 & \mathsf{R} \cup \{e_{12}\} & (a, b : d) \\ = & \mathsf{R} \cup \{e_{12}, e_{13}, eq\} & (a, b : c) \end{array}$$

$\square$(Punktierungslemma 129)

Da in RST-Relationenalgebren die Zylindrifikationen der Relationen gleich der Diagonalrelationen oder ihrer Komplemente sind, sind auch diese im TCI-Abschluß der anderen enthalten.

Korollar 130 (Fast gleiche Relationen) *:*
In Winkelkalkülen gilt: Unterscheiden sich zwei Relationen nur in endlich vielen $\mathbf{A}_2$ *- Punkten, so erfordern sie sich gegenseitig, das heißt, entweder sind beide im TCI-Abschluß enthalten oder beide nicht.*

Beweis:
Nach dem Hauptsatz der Winkelkalküle **??** wird $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ erfordert daher nach dem Arithmetiksatz $\mathbb{C} \setminus \{z\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) - \{z\}$. Schließlich $\mathsf{R}, \mathbb{C} \setminus \{z\} \looparrowright \mathsf{R} \setminus \{z\}$ als Schnitt. Die Aussage folgt nun durch endlich häufiges Anwenden dieser Beziehung oder der Beziehung aus 129.2

$\square$(Korollar)

Satz 131 (Gleichmächtigkeitssatz) *:*
$\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ *erfordert* $(\mathfrak{RC})^{\cup}$.

Beweis:
Der Beweis funktioniert ähnlich wie beim Abschnittslemma 119. $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ enthält sechs verschiedene Typen von Relationen, wobei unter jeder Transformation der Typ erhalten bleibt. Ich zeige für jeweils eine Basisrelation r jeden Typs, daß die Relation $PlaneNot\ r := \top \backslash \{r, e_{12},\ eq\ \}$ im TCI-Abschluß $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})^{TCI}$ enthalten ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r \neq sl$. Mit dem Punktierungslemma folgt $PlaneNot\ r \looparrowright Not\ r \cup \{\ e_{12},\ eq\} := Not\ r$, und dann folgt $Not\ r \looparrowright Not\ s$ für alle Relationen $\{s\}$ gleichen Typs, weil es eine Permutation π gibt, so daß Not r$)^{(\pi)}$ = Not s . Jede solche Relation incl $\top$ = Not eq ist also $\in \mathcal{B}(\mathfrak{RC})^{TCI}$ Deshalb gilt für jede $(\mathfrak{RC})^{\cup}$-Relation R als Schnitt von solchen Relationen $R \in \mathcal{B}(\mathfrak{RC})^{TCI}$.
Also bleibt zu zeigen, daß tatsächlich für jede Relation $r \in (\mathfrak{RC})^{\cup}$ gilt: $PlaneNot\ r \in \mathcal{B}(\mathfrak{RC})^{TCI}$.
1. $\underline{r} = erc$:
Nach dem Abschnittslemma 119 gilt: $(\mathfrak{RC})^{\cup} \looparrowright \{e_{23},\ sf\}$. Aus

$$\begin{array}{ccc} & e_{23},\ sf & (a,b:d) \\ _3\diamond_2 & Perp & (a,d:c) \\ = & R_1 := \{z \mid \Re(z) \geq 1\} & (a,b:c) \end{array}$$

Nach dem Arithmetiksatz gilt:

$$R_1 \looparrowright R_2 := R_1 - \{\tfrac{1}{2}\}$$
$$R_2 \looparrowright R_3 := R_2 \cdot PlaneNotRight$$

(repräsentiert durch alle Punkte, die bei (Links-)Drehung von R_2 um den Ursprung mit Winkel 180^{o}überstrichen werden)
und

$$R_2 \looparrowright R_4 := R_2 \cdot Right$$

und (repräsentiert durch alle Punkte, die bei (Rechts-)Drehung von R_2 um den Ursprung mit Winkel -180^{o}überstrichen werden.) und damit

$$R_2 \looparrowright R_3 \cap R_4 = \{z \mid\ \ |\Re(z)| \geq \tfrac{1}{2}\}$$

Schließlich

$$R_2 \looparrowright R_5 := R_4 + \{\tfrac{1}{2}\}$$

nach dem Arithmetiksatz.
Diese Relation besteht aus allen Tripeln, bei denen beim Startpunkt oder beim Referenzpunkt der Winkel $\geq 90^o$ beträgt. Die Tranformation $T^{(13)}$ bildet sie ab auf die Relation, die all die Tripel enthält, bei denen beim Zielpunkt oder beim Referenzpunkt der Winkel $\geq 90^o$ beträgt. Diese Realtion ist

$$R_6 = \{z \mid\ \ |z - \frac{1}{2}| \leq 1 \vee \Re(z) \geq 1\}$$

Auch mit R_6 kann man wieder die gleiche Operation ausführen:

$$R_6 \looparrowright R_7 := R_6 - \{\tfrac{1}{2}\}\ R_7 \looparrowright R_8 := R_7 \cdot \mathit{PlaneNotRight}$$

(repräsentiert durch alle Punkte, die bei (Links-)Drehung von R_2 um den Ursprung mit Winkel 180^{o}überstrichen werden.) Schließlich

$$R_8 \looparrowright R_9 := R_8 + \{\tfrac{1}{2}\}$$

nach dem Arithmetiksatz.
Wie man sich leicht überlegt, ist $R_9 \cap \mathbb{C} = \mathit{PlaneNot\ erc}$
(vgl. Figur 6.xxxx)

Für alle weiteren Relationen r gibt es nach dem Hauptsatz der Winkelkalküle **??** eine Winkelrelation,die bis auf den Scheitelpunkt $\{1\}$ alle Punkte von $\mathit{PlaneNot}\ r$ enthält. Dieser ist nach dem Punktierungslemma allerdings kein Problem. Beispielsweise für $\underline{r} = \mathit{lp}$:
Nach dem Hauptsatz der Winkelkalküle **??** erfordert $(\mathfrak{RC})^{\cup}$ die Relation $\mathit{PlaneNot}\ \mathit{lp} \setminus \{e_{23}\} = \measuredangle\,]{-90}, 270[$ und nach dem Punktierungslemma auch $\mathit{PlaneNot}\ \mathit{lp} = \{1\} \cup \measuredangle\,]{-90}, 270[$.
Die Fälle $\underline{r} = \mathit{lf}$, $\underline{r} = \mathit{sf}$ und $\underline{r} = e_{23}$ gehen analog. Der Fall $\underline{r} = \mathit{eq}$ ist noch einfacher: Nach dem Punktierungslemma erfordert $(\mathfrak{RC})^{\cup}$ die Relation $\mathit{PlaneNot}\ \mathit{eq} = \mathit{PlaneNot}\ e_{12} \cup \{e_{12}\}$.

$\square$(Satz)

Dieser Satz ist in sofern bemerkenswert, als ich für den Beweis an keiner Stelle die Vereinigung von Relationen benötige. Er gilt daher, obwohl der TCI-Abschluß selbst nicht abgeschlossen unter Vereinigung ist. Als nächstes bleibt zu klären, wie schnell Ableitungen in diesen Kalkülen möglich sind. Dazu ist es hilfreich zu wissen, welche Relation in ihnen definierbar sind, da ich in allen Kalkülen, in denen eine Relationen definierbar ist, ein Constraint finde, das die Erfüllbarkeit dieser Relation testet. Aus der Komplexität des Tests dieser Relation ergibt sich dann eine untere Schranke für die Kompexität des Kalküls.

6.3 Ausdrucksmächtigkeit

Bemerkung 132 (Reflexivität und Transitivität von definierbar) *:*
Alle Relationen eines Kalküls sind in ihm definierbar. Wenn in einem Kalkül $\mathfrak{K}$ eine Relationenmenge T durch eine Relationenmenge S und S durch R definierbar ist, dann ist auch T durch R definierbar.

Beweis:

Reflexivität von "definierbar":

Jede Relation mit den in ihr vorkommenden Elementen, stellt offenbar ein sich selbst definierendes CSP dar.

Transitivität von "definierbar": Sei $\mathsf{T} \in T$ eine durch das CSP

$$C_{\mathsf{T}} = (e_{\mathsf{T},1}, \dots, e_{\mathsf{T},k}; x_{\mathsf{T},1}, \dots, x_{\mathsf{T},n_{\mathsf{T}}-k})$$

definierbare Relation, wobei alle Constraints aus C_{T} Relationen aus S sind. $\mathsf{S} \in S$ werde definiert durch

$$C_{\mathsf{S}} = (e_1, \dots, e_k; x_{\mathsf{S},1}, \dots, x_{\mathsf{S},n_{\mathsf{S}}-k}),$$

wobei alle Constraints aus C_{S} Relationen aus R sind. Dann wird T definiert durch das CSP C^R_{T}, das entsteht, wenn man in C_{T} jedes Constraint $\mathsf{S}\ (a, b : c)$ durch

$$C_{\mathsf{S}} = (a_b, \dots, a_c; x_{\mathsf{S},1}, \dots, x_{\mathsf{S},n_{\mathsf{S}}-k}),$$

ersetzt, wobei die $x_{S,i}$ neue Kopien seien, die in C^R_{T} nicht an anderer Stelle vorkommen. Weitere Bedingungen werden nicht gestellt, d. h. alle dadurch nicht festgelegten Constraints werden durch $\top$ beschrieben.

Um zu zeigen, dass C^R_{T} tatsächlich T definiert, muss ich erstens zeigen, dass eine für Instantiation θ, die C^R_{T} realisiert, $\{\ \mathsf{T}\ \}(e^\theta_1, e^\theta_2 : e^\theta_3)$ gilt, und zweitens, daß sich jede Realisierung von $\{\ \mathsf{T}\ \}(e^\theta_1, e^\theta_2 : e^\theta_3)$ zu einer Realisierung von C^R_{T} erweitern läßt.

Die erste Aussage folgt sofort daraus, daß in jeder Realisierung von C^R_{T} jedes Constraint $\mathsf{S}\ (a, b : c)$ erfüllt wird, weil C_{S} Teil-CSP von C^R_{T} ist.

Die zweite Aussage gilt, weil man jede Realisierung von T erweitern kann zu einer Realisierung von C^R_{T}, und darin jede Relation S so, dass das entsprechende Teil-CSP von C^r_{T} erfüllt ist. Die Vereinigung aller dieser Erweiterungen ist eine Realisierung von C^r_{T}, weil die übrigen Relationen $\top$ in C^r_{T} in jedem Fall erfüllt sind.

$\square$(Bemerkung 132)

Satz 133 (Definierbarkeitskriterium $R \looparrowright \mathsf{S} \Rightarrow R \mathrel{:>} \mathsf{S}$**)** *:*
Wenn eine Menge R von Relationen eine Relation S erfordert, ist S durch jedes Kalkül, das alle Relationen aus R enthält, definierbar.

Beweis:

Den Beweis führe ich induktiv. Offenbar geht jede Relation im TCI-Abschluß durch eine endliche Folge der Operationen Transformationsoperation, Schnitt oder Komposition aus Relationen in R hervor.. Offenbar ist jede Relation $\mathsf{R} \in R$ selbst definierbar durch ein CSP $\{e_1, \ldots, e_e\}$ mit der Relation $\{\ \mathsf{R}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$. Darauf aufbauend, gebe ich für jede dieser Operationen eine Konstruktion an, wie man aus einem CSP, das die Operanden definiert, ein CSP erhält, das das Resultat definiert.

Transformationen: Sei $\mathsf{S} = T^\pi(\mathsf{R})$ und $\{\ \mathsf{R}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$ bereits als definierbar durch ein CSP $C(e_1, e_2, e_3, x_1, \ldots, x_k)$ nachgewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathsf{S}\ (e_1, e_2 : e_3) &\iff \mathsf{R}\ (e_{\pi()1}, e_{\pi(2)} : e_{\pi(3)}) \\ &\iff C(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, e_{\pi(3)}, x_1, \ldots, x_k) \text{ definiert } \mathsf{R} \end{aligned}$$

Denn das gleiche CSP mit permutierten Positionen der Elemente beim Aufruf, definiert die entsprechende transformierte Relation.

Schnitt: Sei $\mathsf{S} = \mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2$, und R_i definierbar durch $C_i(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i-3})$. Dann wird S definiert durch die Vereinigung der beiden CSPs, in denen die Elemente $e_{1,j}$ und $e_{2,j}$ identifiziert werden und ansonsten keine zusätzlichen Constraints auferlegt werden. Dieses wird formal beschrieben durch das CSP

$$C_1 \cap C_2 := C(e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}; x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1-3}, e_{2,2}, e_{2,2}, e_{2,3}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n_2-3})$$

mit den zusätzlichen Constraints

$$\begin{array}{lll} e_{1,j} e_{1,j} e_{2,j} eq & (j \leq 3) & \text{und ebenso für alle Permutationen} \\ e_{1,j} e_{2,j} e_{2,j} eq & (j \leq 3) & \text{und ebenso für alle Permutationen} \\ \{\ \top\ \}(x, y : z) & & \text{sonst} \end{array}$$

Kompositionen: Sei $\mathsf{S} = \mathsf{R}_1\ {}_3\diamond_1\ \mathsf{R}_2$, und R_1 sei definierbar durch ein CSP $C_1(e_{11}, e_2, d; x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_i-3})$, und R_2. Durch CSP $C_2(e_{2,1}, d, e_3; x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_i-3})$, Dann wird S definiert durch die Vereiinigung der beiden CSPs (diesmal nicht disjunkt) ein CSP $C_1(e_1, e_2, d; x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1-3})$ und $C_2(e_1, d, e_3, d; x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2-3})$ $=C(e_1, e_2, e_3; d, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1-3}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2-3})$ wobei alle neu zu definierenden Relationen als $\{\ \top\ \}(x, y : z)$ zu definieren sind. Denn Komposition ist definiert als

$$\mathsf{R}_1\ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2 \iff \exists d : \{\ \mathsf{R}_1\ \}(e_1, e_2 : d) \wedge \{\ \mathsf{R}_2\ \}(e_1, d : e_3).$$

Wenn es zu einer Instantiation von (e_1, e_2, e_3) eine mit

$$C(e_1, e_2, e_3; d, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1-3}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2-3})$$

konsistente Erweiterung E gibt, dann gilt insbesondere $\{\ \mathsf{R}_1\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : d^\theta)$, denn E ist auch Erweiterung von C_1. Analog gilt $\{\ \mathsf{R}_2\ \}(e_1^\theta, d^\theta : e_2^\theta)$. Das heißt, es

gibt zu $(e_1^\theta, e_2^\theta, e_3^\theta)$ ein d^θ, so daß $\{\ \mathsf{R}_1\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : d^\theta) \wedge \{\ \mathsf{R}_2\ \}(e_1^\theta, d^\theta : e_3^\theta)$, also $\{\ (\mathsf{R}_1\ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2)\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta)$
Umgekehrt,wenn zu $(e_1^\theta, e_2^\theta, e_3^\theta)$ ein d^θ existiert, so daß $\{\ \mathsf{R}_1\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : d^\theta) \wedge \{\ \mathsf{R}_2\ \}(e_1^\theta, d^\theta : e_3^\theta)$, dann existiert nach Voraussetzung eine Erweiterung E_1 von $(e_1^\theta, e_2^\theta, d^\theta)$ auf C_1 und eine andere E_2 von $(e_1^\theta, d^\theta, e_3^\theta)$ auf C_2, und dann ist $E_1 \cup E_2$ eine Erweiterung von $e_1^\theta, e_2^\theta, e_3^\theta$ auf C,
Damit ist gezeigt, daß C die Relation $(\mathsf{R}_1\ {}_3\diamond_2\ \mathsf{R}_2)$ definiert.
Da jede Komposition sich durch Permutationen und die Komposition ${}_3\diamond_2$ ausdrücken läßt, ist damit die Behauptung bewiesen.

□(Definierbarkeitskriterium Satz 133)

Damit erhält man als Korollare der Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt:

Zwar ist offensichtlich nach Beispiel 7 für jedes Kalkül $\mathfrak{K}$ das Basiskalkül weniger ausdrucksmächtig als das Kalkül selbst, aber erlaubt man, daß Relationen unbestimmt bleiben, dann gibt es $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{K})$ Relationenalgebren, die sogar gleich ausdrucksmächtig sind wie ihre Vervollständigungen:

Korollar 134 ($\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})\mathfrak{RC}$ ist gleich ausdrucksmächtig wie $(\mathfrak{RC})^\cup$) *:*
$(])^\cup$*:*
Jedes CSP von $(\mathfrak{RC})^\cup$ ist äquivalent zu einem CSP von $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})\mathfrak{RC}$.

Beweis:
Die Behauptung folgt direkt aus dem Gleichmächtigkeitssatz mit dem Definierbarkeitskriterium.

□()

Satz 135 (Definierbare Relationen) *:*
In jedem Kalkül, in dem ein Winkel definierbar ist, sind definierbar:

1. Alle Relationen von $\mathfrak{RC}$, insbesondere Kolinearität (Relation Line*), Rechtwinkligkeit (Relation* Perp *bzw. ihre Tramsformationen). Außerdem die Relationen Mittelpunkt zwischen den zwei anderen (Relation* Midpoint*)), Äquidistanz (Relation* Equidist*)), festes Abstandsverhältnis $\in \mathbf{A}_2$ sind definierbar.*

2. Alle Relationen von mit Linial und Zirkel konstruierbaren Regionen sind definierbar.

Beweis:
1. folgt, da alle diese Relationen im TCI-Abschluß jedes Winkelkalküls Relationen transitiv ist.
2.Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind:

- Schnitt von zwei Kreisen oder Geraden,
- Ziehen einer Geraden durch zwei Punkte
- Zeichnen eines Kreises um einen Punkt durch einen anderen Punkt.

Jede dieser Konstruktionsschritte läßt sich ähnlich wie bei dem Beweis, daß alle Relationen im TCI-Abschnitt definierbar sind, als Konstruktionen aus CSPs für die Ausgangsrelationen konstruieren.

Gerade durch 2 Punkte:
Seien $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2$ die durch die beiden Punkte p_1, p_2 repräsentierbaren Relationen, G die durch die Gerade $\ell(p_1, p_2)$ repräsentierte und P_i sei definierbar durch $C_i(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}; x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i-3})$. Dann wird G definiert durch $C_{\mathsf{G}}(e_1, e_2, e_3; e_{i,j}, x_{ij})$, einer Vereinigung der beiden CSPs C_i mit zustzlichen Punkten $e_1, \dots, e_3$ mit den zustzlichen Constraints $\{\ \mathit{eq}\ \}(e_{1,1}, e_{2,1} : e_1)$, $\{\ \mathit{eq}\ \}(e_{1,2}, e_{2,2} : e_2)$, durch die Start- und Referenzpunkte der CSPs identifiziert werden, also $e_1 e_{1,1}$ und $e_{2,1}$ sowie $e_2 e_{1,2}$ und $e_{2,2}$, und das Constraint $\mathit{Line}\ (e_{1,3}, e_{2,3} : e_3)$, das erreicht, daß der Zielpunkt e_3 auf der Geraden durch p_1, p_2 liegt. Ansonsten werden keine zusätzlichen Constraints auferlegt, das heißt, alle noch undefinierten seien $\top$. C_{G} definiert G, denn jede Instantiation von e_1, e_2 und e_3 ist allenfalls konsistent erweiterbar durch die Punkte $e^{\theta}_{i,3}$, die $\mathit{p}_i\ (e_1, e_2 : e_{i,3})$ erfllen, und zwar genau dann, wenn $\{\ \mathsf{G}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$ gilt, denn genau dann ist $\mathit{Line}\ (e_{1,3}, e_{2,3} : e_3)$ erfllbar (Beachte: $\{\ \mathsf{G}\ \}(e^{\theta}_1, e^{\theta}_2 : e^{\theta}_3) \Leftrightarrow e^{\theta}_{1,3}, e^{\theta}_{2,3}$ und e^{θ}_3 kolinear)

Kreis um m durch p:
Seien M, P die durch die beiden Punkte m, p repräsentierbaren Relationen, K die durch den Kreis um m durch p repräsentierte und sei

$$\begin{array}{lll} \mathsf{M} & \mathit{durch} & C_m(e_{m,1}, e_{m,2}, e_{m,3}; x_{m,1}, \dots, x_{m,n_m-3}), \\ \mathsf{P} & \text{durch} & C_p(e_{p,1}, e_{p,2}, e_{p,3}; x_{p,1}, \dots, x_{p,n_p-3}) \qquad \text{definierbar.} \end{array}$$

Dann wird G definiert durch die Vereinigung der beiden CSPs mit zustzlichen Punkten $e_1, \dots, e_3$ mit den zustzlichen Constraints $\{\ \mathit{eq}\ \}(e_{m,1}, e_{p,1} : e_1)$, $\{\ \mathit{eq}\ \}(e_{m,2}, e_{p,2} : e_2)$, durch die Start- und Referenzpunkte der drei CSPs identifiziert werden, und das Constraint $\mathit{EquDist}\ (e_{1,3}, e_{2,3} : e_3)$, das erreicht, daß der Zeilpunkt e_3 auf der Geraden durch p_1, p_2 liegt. Ansonsten werden keine zusätzlichen Constraints auferlegt, das heißt alle noch undefinierten seien $\top$ Ganz analog zum Fall Gerade durch zwei Punkte wird gezeigt, daß dieses CSP die Relation, die durch den Kreis repräsentiert wird, definiert.

$\square$(Satz 135)

Bezeichne $\Gamma_{y=f(x)}$ die RST-Relation, die durch den Graphen von f $(=\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\})$ repräsentiert wird, und allgemein für binäre Relationen R

bezeichne Γ_R die RST-Relation, die durch $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid R(x,y)\}$ repräsentiert wird.

Korollar 136 (Definierbarkeit von $\mathsf{Parallel}$) *:*
$\mathsf{Parallel}$ ist in jedem Winkelkalkül definierbar. sowie deren Umkehrfunktionen definierbar und damit jede Punktrelation, die durch einen algebraischen Punkt definiert werden kann.

Beweis:
Die Relationen von $\mathfrak{RC}$ sind in jedem Winkelkalkül definierbar, und Beispiel 6 definiert Parallelität in $\mathfrak{RC}$. Hauptsatz der Winkelkalküle definierbar ist, genügt es wegen der Transitivität der Definierbarkeit zu zeigen, daß
$\Gamma_{y=(f-g)(x)}, \Gamma_{y=(f\cdot g)(x)}, \Gamma_{y=\frac{f(x)}{g(x)}}$ durch $\Gamma_{y=f(x)}, \Gamma_{y=g(x)}$ definierbar sind. Dies hat bereits Schwabhäuser getan [WS83].

$\square$(Korollar)

Kapitel 7

Komplexitätsbetrachtungen

7.1 Das Erfüllbarkeitsproblem

Mit Hilfe der Kalküle wollen wir automatisch überprüfen, welche Aussagen (über Relationen) sich aus einer gegebenen Beschreibung einer Konstellation folgern lassen.
Ein probates Mittel zur automatischen Überprüfung einer Folgerung besteht darin, die Negation der Folgerung zu der Beschreibung hinzuzunehmen, und diese erweiterte Menge auf Konsistenz zu prüfen. Denn wenn sich diese Erweiterung als inkonsistent herausstellt, das heißt, daß es kein Modell gibt, in der sie gilt, dann wird logischerweise in jedem Modell, das den Voraussetzungen entspricht, die Negation der Folgerung nicht gelten, das heisst die Folgerung ist schlüssig. Deshalb ist die praktikable Überprüfbarkeit der Konsistenz einer Beschreibung entscheidend für die Praktikabilität eines Kalküls für Schlussfolgerungen.

Daher ist die Frage, ob eine als CSP gegebene Beschreibung erfüllbar ist, von zentraler Bedeutung.

Definition 137 (Kalkül-SAT) *Für ein gegebenes Kalkülmodell $\mathfrak{K}$ (zum Beispiel:* RC *) steht $\mathfrak{K}$-SAT (z. B.: $\mathfrak{RC}$-SAT) für das folgende Problem:*
Gegeben: *Ein CSP in* K *gegeben durch ein Liste von Elementen und Constraints (Relationen) zwischen ihnen.*
Frage: *Ist das CSP erfüllbar im Standardmodell $\mathbb{R}^2$,das heißt gibt es eine Instantiation der Elemente als Punkte in die Ebene, die mit allen Constraints konsistent ist, das heißt, die alle Constraints realisiert?*

Ist diese Aufgabe in jedem Fall lösbar? Die Antwort hierauf ist für alle hier vorgestellten Kalküle: „Ja.“. Leider, jedoch, ist die Antwort im allgemeinen sehr aufwendig. Die von mir vorgestellten Kalküle sind immerhin alle in PSPACE.

Satz 138 (Die hier vorgestellten Kalküle sind alle in PSPACE) *:*
$\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$, $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{C}v)$, $\mathcal{B}(\mathfrak{C}v)$, $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{L})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$ und sogar $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})^{TCI} \in$ PSPACE.

Beweis:
Jedes CSP über $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$, $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{C}v)$, $\mathcal{B}(\mathfrak{C}v)$, $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{L})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$ und sogar jedes CSP über $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})^{TCI}$ läßt sich polynomiell auf ein System von linearen und quadratischen Gleichungen und Ungleichungen reduzieren.
Stellen wir zunächst das Kalkül $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})^{TCI}$ zurück und betrachten die übrigen. Wenn die Relation $\top$ in einem CSP auftaucht, stellt sie keine Einschränkung dar und wegen ihr braucht im Sinne dieser Reduzierung keine (Un-)Gleichung bei der Reduzierung eingeführt werden. Daher genügt es, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Basiskalküle zu betrachten.
Für jede Basisrelation r von $\mathfrak{RC}$ oder $\mathfrak{C}v$ oder $\mathfrak{L}$ exisitieren maximal vier (Un-)gleichungen, die die Werte A, B, Γ, Ω über den 6 Variablen $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ (Koordinaten der instanzierenden Punkte) mit 0 vergleichen, und die den Constraint $r\ (a, b : c)$ definieren. (So, wie bei der Vorstellung der Kalküle in Kapitel 4.5 aufgeführt.) Ersetzt man in einem CSP mit n Variablen und $m = O(n^3)$ Constraints die Variablen durch jeweils ihre 2 Koordinaten und jeden Constraint durch die entsprechenden (Un-)gleichungen, so erhält man ein System von $m' \leq 4m$ Polynom-Ungleichungen vom Grad $d \leq 2$ in $n' = 2n$ Variablen, deren Koeffizienten alle 0 oder 1 sind. Dieses System von Gleichungen und Ungleichungen ist lösbar, genau dann, wenn jeder Constraint erfüllt wird. Die Größe des Ungleichungssystems sei $\Sigma = m' + n' + d$. Da die Polynome in den Ungleichungen nur von der Relation des Constraints*der* abhängen, können sie einer Tabelle entnommen werden. Daher ist die Reduktion in PSPACE möglich, denn die Ausgabe ist in PSPACE von der Größe der Konstellation I.
Ebenso läßt sich $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})^{TCI}$-SAT auf ein System von (Un-)gleichungen reduzieren. Gegeben sei eine Konstellation der Vervollständigung $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})^{TCI}$, bei der die Relationen als Folge von Kompositionen und Schnitten gegeben sei, wobei als Größe des CSP die Anzahl der auftretenden Relationsbezeichner aufzufassen ist, also z. B. m=3 für $(\mathsf{R} \cap \mathsf{S})\ {}_1\diamond_2\ \mathsf{T}\ (a, b : c)$. Denn es kommen die drei Relationen R, S, T vor. Auch diese ist polynomiell reduzierbar, denn für den Schnitt von zwei Relationen werden die entsprechenden Gleichungen für beide Operanden in das System übernommen. Für Transformationsoperationen (Permutation) werden die entsprechenden Variablen in der Gleichung vertauscht. Für die Komposition ${}_\kappa\diamond_\lambda$ wird ein zusätzliches, bisher nicht verwendetes Variablenpaar x_1, x_2 eingeführt und bei der Angabe der die Relationen definierenden (Un-)Gleichungen, ersetzt man für die erste Relation die Koordinaten des κ-ten Punktes durch x_1, x_2, und für die zweite Relation ersetzt

die Koordinaten des λ-ten Punktes durch x_1, x_2. Das CSP mit Komposition und Schnitt ist gemäß der Definition von Kompositon und Schnitt erfüllbar, genau dann, wenn das entsprechende Gleichungssystem lösbar ist. Und auch diese Reduktion ist in PSPACE möglich, da die Anzahl der Variablen $m' \leq 3m$ ist.
Nach einem Theorem von [Ren92] ist die Lösbarkeit eines solchen Systems von Ungleichungen in PSPACE.

□(Satz 138)

Korollar 139 (Entscheidbarkeit) *:*
Damit ist insbesondere auch gezeigt, daß alle diese Probleme entscheidbar sind.

Als nächstes stellt sich die Frage, wie rechenaufwendig diese Entscheidung tatsächlich ist, denn PSPACE ist eine für die Praxis zu hohe Schranke. Welcher dieser Kalküle liegen in P und sind damit in der Praxis handhabbar? Oder sind sie, wie so viele andere bekannte Probleme auch, NP-hart, also besteht allenfalls Hoffnung, falls sich P =NP bewahrheiten sollte?

7.2 NP-Härte von $\mathfrak{K}$-SAT für einige ternäre Relationenalgebren $\mathfrak{K}$

$\mathfrak{K}$-SAT ist für viele vollständige binäre Relationenalgebren NP-vollständig, etwa für die Intervallalgebra [All83] und die vollständigen Kalküle des topologischen Region Connection Calculus (RCC5 und RCC8) ([RN99]). Gleiches gilt für den ternären CYCORD-Kalkül von A. Isli und A. Cohn [IC98]. Dennoch gibt es in vielen Fällen eine maximale Teilmenge von Relationen, sodaß, wenn man das Kalkül auf diese Menge einschränkt, die Konsistenzentscheidung für CSPs des eingeschränkten Kalküls polynomiell entscheidbar ist. Für die Intervallalgebra ist eine maximale Teilklasse bekannt [NB95], für die RCC-Kalküle [Ren98]98 und für den ternären CYCORD-Kalkül IsliCohn98 sind ebenfalls polynomielle Teilklassen beschrieben worden. Für die von C. Freksa und mir vorgestellten Kalküle sind noch keine Komplexitätsuntersuchungen bekannt.
Ternäre Relationenalgebren sind offensichtlich komplexer als binäre, da für jede Relation mehr Instantiationen von Elementen auftreten, die zueinander in Beziehung stehen, ähnlich dem Untersschied zwischen 3SAT und 2SAT. Deshalb erwartet man intuitiv, daß ternäre Kalküle, die Erweiterungen von binären sind, eher NP-hart sind als ihre binären Entsprechungen. In der Tat zeigt sich, daß alle ternären Kalküle, die eine Richtungsdefinition enthalten, NP-hart sind,

und zwar schon deren erweitertes Basiskalkül, das aus den Relationen ($\mathcal{B}(\mathfrak{K})$ und der universellen Relation besteht, die totales Unwissen über die Relation zwischen den entsprechenden drei Punkten ausdrückt.

7.2.1 NP-Härte-Beweise

Zunächst einmal betrachten wir den Fall von Relationenalgebren, die die Strecke zwischen Start- und Ziel als Relation enthalten, eine Relation, die gerade für RST-Relationenalgebren sehr naheliegend ist.

Theorem 140 (NP-Härte für sc umfassende RAs) *:*
$\mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{K})$-SAT ist NP-hart für jedes Kalkül $\mathfrak{K}$, das die Relation $\{\mathsf{s}\mathfrak{f}\}$ (und also mindestens implizit $\{\mathsf{sc}\}$, $\{\mathsf{s}\mathfrak{b}\}$) und die universelle Relation $\top$ enthält.

Beweis:

Die NP-Härte von $\mathfrak{K}$-SAT läßt sich in diesen Fällen durch eine einfache polynomielle Reduktion auf das als NP-vollständig bekannte Problem der Betweenness beweisen, da die Relation $\{\mathsf{sc}\}$ quasi der Betweenness entspricht.

Definition 141 (Betweenness-Problem) *:*
(vgl. [MRG79]) Gegeben: Eine Menge von m Tripeln $(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})\quad (i \leq m)$ über einer Variablenmenge $v_1, \ldots, v_n$.
Frage: Gibt es eine Instantiation der Variablen als Punkte in $\mathbb{R}$, sodaß jeweils v_{i_3} zwischen v_{i_1} und v_{i_2} liegt, das heißt $(v_{i_1} < v_{i_3} < v_{i_2})$ oder $(v_{i_1} > v_{i_3} > v_{i_2})$?

Für den Beweis gebe ich eine Konstruktion an, die für jede Instanz $\mathcal{B}$ von Betweenness eine Instanz (ein CSP) $C_{\mathcal{B}}$ von $\mathfrak{K}$-SAT liefert, deren zugrundeliegende Konstellation nur die Relationen $\{\mathsf{sc}\}$ [1] und die universelle Relation enthält, sodaß $C_{\mathcal{B}}$ erfüllbar ist, genau dann, wenn $\mathcal{B}$ erfüllbar ist. Diese Konstruktion ist polynomiell in der Größe $\Sigma = 3m$ von $\mathcal{B}$.
Sei also $\mathcal{B} = \{(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}) \mid (i \leq m), i_1, i_2, i_3 \leq n\}$ solch eine Instanz. Dann definiere ich als Instanz von $\mathfrak{K}$-SAT das CSP mit den Elementen $e_1, \ldots, e_n$ und den Constraints

$$\begin{array}{rl} \{\,\mathsf{sc}\,\}(e_{i_1}, e_{i_2} : e_{i_3}), & \text{falls } (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}) \in \mathcal{B} \\ \top\,(e_{i_1}, e_{i_2} : e_{i_3}) & \text{sonst.} \end{array}$$

[1] und $\{\mathsf{s}\mathfrak{f}\}$ und $\{\mathsf{s}\mathfrak{b}\}$, falls die entsprechende Konstellation voll (und $\mathfrak{K}$ permutations-vollständig) ist

Wenn $\mathcal{B}$ erfüllbar ist, etwa durch die Instantiation $v_i^\theta = x_i \in \mathbb{R}$, so ist $e_i^\theta := (x_i \ ; \ 0) \in \mathbb{R}^2$ eine Realisierung von $C_\mathcal{F}$.
Umgekehrt, sei $e_i^\theta := (x_i \ ; \ y_i) \in \mathbb{R}^2$ eine Realisierung von $C_\mathcal{B}$, so existiert auch eine Realisierung $(e_i')^\theta := (x_i' \ ; \ y_i') \in \mathbb{R}^2$, sodaß $x_i' \neq x_j'$, falls $i \neq j$. Denn weil in $C_\mathcal{B}$ nur die Relationen $\{\mathsf{sc}\}$, $\{\mathsf{sb}\}$, $\{\mathsf{sf}\}$ und $\top$ auftreten, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_i^\theta \neq e_j^\theta$ angenommen werden. Da es nur endlich viele Paare (i, j) gibt, liegen die Geraden $\ell(e_i^\theta, e_j^\theta)$ für $(i \neq j)$ nur in endlich vielen Richtungen, so daß es eine Drehung gibt, die die Instantiation θ auf eine Instantiation θ' abbildet, bei der keine dieser Geraden parallel zur y-Achse liegt, sodaß also $x_i' \neq x_j'$ gilt, falls $i \neq j$. Da die Relationen $\{\mathsf{sc}\}$ und $\top$ invariant sind unter Drehung, ist dies auch eine Realisierung von $C_\mathcal{B}$. Dann ist $v_i^\theta = x_i' \in \mathbb{R}$ eine Realisierung von $\mathcal{B}$, weil die Reihenfolge der Punkte, die durch $\{\mathsf{sc}\}$ definiert ist, sich bei der Projektion auf die x-Achse überträgt.

Korollar 142 (NP-Härte einiger Kalküle) *:*
$\mathcal{B}^\top(\mathfrak{RC})$-SAT, $\mathfrak{RC}$-SAT, $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{C}v)$-SAT, $(\mathfrak{C}v)^\cup$-SAT, $\mathcal{B}^\top(\mathfrak{L})$-SAT, $(\mathfrak{L})^\cup$- SAT sind NP*-hart.*

Beweis:
Die aufgeführten Kalküle genügen alle den Voraussetzungen von Theorem 140

□(Korollar 142)

Satz 143 (Definierbarkeitskriterium für NP-Härte) *:*
Wenn in einem Kalkül $\mathfrak{K}$ mit $\top \in \mathfrak{K}$ eine endliche Menge von Relationen R definierbar ist und es ein Kalkül $\mathfrak{R}$ gibt, das die Menge $R \cup \{\top\}$ umfaßt und NP*-hart ist, dann ist auch $\mathfrak{K}$* NP*-hart.*

Beweis:
Für den Beweis gebe ich wieder eine Konstruktion an, die ein Problem von $\mathfrak{K}$-SAT nach $\mathfrak{R}$-SAT polynomiell reduziert. Die folgende Konstruktion liefert für jede Instanz I von $\mathfrak{R}$-SAT eine Instanz C von $\mathfrak{K}$-SAT, sodaß I genau dann erfüllbar ist, wenn C erfüllbar ist. Sie ist polynomiell in der Größe m (Anzahl der Constraints) von I über $\mathfrak{R}$.
Sei C_R eine K-Komponente, die in $\mathfrak{K}$ die Relation $\mathsf{R}\ (e_1, e_2 : e_3)$ definiert. C_R bestehe aus den Elementen $e_1, \ldots, e_3$ und Hilfselementen $h_1, \ldots, h_{k_\mathsf{R}}$, insbesondere $C_\top := \top\ (e_1, e_2 : e_3)(k_\top = 0)$. Sei $k := max_{\mathsf{R} \in I} k_\mathsf{R}$, also $3 + k$ die maximale Anzahl an Elementen einer solchen Komponente. Nun bestehe C aus der Vereinigung aller Komponenten C_R mit $\mathsf{R} \in I$, wobei die Hilfselemente alle paarweise verschieden seien. Zusätzlich gelten in C die Constraints $\top\ (x, y : z)$ für alle Tripel $(x, y, z) \quad (x, y, z \in \bigcup_{\mathsf{R} \in I} C_\mathsf{R})$, die nicht zusammen

in einer Komponente auftreten. Offenbar ist diese Konstruktion polynomiell, da sie aus maximal $n+km$ vielen Elementen besteht, und jede der $O((n+km)^3)$ Constraints rein syntaktisch definiert werden kann.
Es bleibt zu zeigen, daß C erfüllbar ist, genau dann, wenn I erfüllbar ist.
Sei also C erfüllt durch θ. Dann ist θ (eingeschränkt auf die Elemente $e_1, \ldots, e_n$) auch Realisierung von I. Denn wenn θ C realisiert, so realisiert θ insbesondere alle Komponenten C_{R} und damit auch alle Constraints, die von den Komponenten definiert werden, also auch I. Umgekehrt gibt es wegen der Definierbarkeit zu jeder Realisierung einer Relation aus I eine Erweiterung, die die Komponente C_{R} realisiert. Die Vereinigung aller dieser Realisierungen bildet eine Realisierung von C, da die Relation $\top$ zwischen Elementen verschiedener Komponenten stets gilt.

$\square$(Satz 143)

Korollar 144 (NP-Härte aller richtungsdefinierenden Kalküle) *:*
1. Für jedes Kalkül $\mathfrak{K}$, in dem eine Richtung (ein Winkel) definierbar ist, ist $\mathfrak{K}^{\top}$-SAT NP*-hart. Insbesondere sind $\mathfrak{SC}$-SAT, $\mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{SC})$-SAT, $\mathfrak{DC}$-SAT, $\mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{DC})$-SAT, $\mathfrak{K}_{\alpha^o}$-SAT, $\mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{K}_{\alpha^o})$-SAT für jedes α* NP*-hart. 2. Als Verfeinerung ist der vollständige feine Kalkül $\mathfrak{F}$ Oberkalkül etwa von*

Theorem 145 (NP-Härte von $\mathfrak{E}q$) *:*
$\mathfrak{K}$-SAT ist NP*-hart für jedes Kalkül $\mathfrak{K}$, das die Relationen $\{\mathfrak{e}_{12}, \mathfrak{e}_{23}, \mathfrak{e}_{13}\}$ enthält. Insbesondere $\mathfrak{E}q$ -SAT, $\mathfrak{RC}$-SAT und $\mathfrak{R}$-SAT für alle vollständigen Relationenalgebren $\mathfrak{R}$ sind* NP*-hart.*

Beweis:

Der folgende NP-Härte-Beweis benutzt eine einfache Transformation von dem als NP-vollständig bekannten aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblem NOT-ALL-EQUAL-3-SAT nach $\mathfrak{K}$-SAT. NOT-ALL-EQUAL-3-SAT ist das folgende Problem :

Definition 146 (NOT-ALL-EQUAL-3-SAT) *:*
(vgl. [MRG79])
Gegeben: Eine Menge von m Klauseln $\{z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}\}$ $(i \leq m)$, wobei die z_{ij} Literale über einer Variablenmenge $v_1, \ldots, v_n$ sind.
Frage: Gibt es eine Instantiation der Variablen als Wahrheitswerte in {wahr, falsch }, sodaß in jeder Klausel jeweils mindestens ein Literal mit wahr und mindestens eines mit falsch belegt ist ?

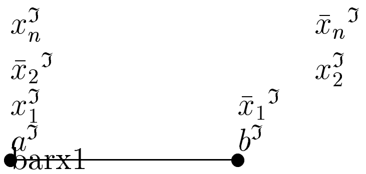


Abbildung 7.1: Eine Realisierung einer Konstellation als Instanz von $\mathfrak{Eq}$ -SAT, die einer Belegung $x_1 =$ falsch, $x_2 =$ wahr, $x_n =$ falsch entspricht.

Der Beweis nutzt die Methode von component design [MRG79], daß heißt, es wird eine in der Größe von $\mathcal{F}$ polynomiellle Konstruktion angegeben, die für jede Formel $\mathcal{F}$ von NOT-ALL-EQUAL-3-SAT eine Instanz $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathfrak{K}$-SAT liefert, die nur die Relation $\{\mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{23},\ \mathfrak{e}_{13}\}$ enthält. Diese ist erfüllbar, genau dann, wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist.

<u>Die Konstruktion:</u>
Sei $\mathcal{F} = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee_{m3})$ eine Formel mit n Variablen und m Klauseln.
Die Grundidee der Konstruktion besteht darin, die Wahrheitswerte der Variablen zu repräsentieren, indem ein Punkt für *wahr* und ein Punkt für *falsch* eingeführt wird, wobei in jeder Realisation alle Punkte mit dem gleichen Wahrheitswert koinzidieren. Die Bedingung, daß nicht alle Wahrheitswerte in einer Klausel gleich sind, wird durch den Constraint $\{\mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{13},\ \mathfrak{e}_{23}\}$ erreicht.

$C_{\mathcal{F}}$ besteht aus folgenden Komponenten (vgl. Abbildung 7.1):

1. <u>Grundgerüst:</u>
Das Grundgerüst besteht aus zwei Elementen a und b mit dem Constraint $\{\ \mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{13},\ \mathfrak{e}_{23}\ \}(a, a : b)$, das $a \neq b$ sicherstellt.

2. <u>Wahrheitswert-Komponente:</u>
Die Idee ist, daß Elemente für die Variablen eingeführt werden, die mit a oder mit b koinzidieren können, wobei Koinzidenz mit a dem Wahrheitswert *wahr* der Variablen entspreche und Koinzidenz mit b dem Wahrheitswert *falsch*. Weil jede Variable bei jeder Belegung entweder *wahr* oder *falsch* entspricht, werden für jede Variable x_i zwei Elemente x_i und $\bar{x}_i$ (für $\neg x_i$) mit den Constraints $\{\ \mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{13},\ \mathfrak{e}_{23}\ \}(a, b : x_i)$ beziehungsweise $\{\ \mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{13},\ \mathfrak{e}_{23}\ \}(a, b : \bar{x}_i)$ eingeführt, und ein zusätzliches Constraint $\{\ \mathfrak{e}_{12},\ \mathfrak{e}_{13},\ \mathfrak{e}_{23}\ \}(x_i, x_i : \bar{x}_i)$ stellt sicher, daß x_i und $\neg x_i$ verschiedene Wahrheitswerte erhalten.

4. Erfüllbarkeits-Test:
Für je drei Literale z_{k1}, z_{k2}, z_{k3}, die zusammen in einer Klausel auftreten, werden zusätzlich die Constraints $\{\ \mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{13}, \mathsf{e}_{23}\ \}(z_{k1}, z_{k2} : z_{k3})$ eingeführt, durch die die Möglichkeit, daß alle drei Elemente koinzidieren und also die Wahrheitswerte gleich sind, ausgeschlossen ist.

Diese Konstruktion kann offensichtlich in $O(m + \frac{n(n+1)}{2}) \in O(m^2)$, also in polynomieller Zeit ausgeführt werden.

Es bleibt zu zeigen, daß eine Instanz von NOT-ALL-EQUAL-3-SAT eine Lösung hat, genau dann, wenn die derart konstruierte Konstellation als Instanz von $\mathfrak{RC}$-SAT konsistent ist.

$\mathfrak{RC}$-SAT $\Rightarrow$ NOT-ALL-EQUAL-3SAT:
Angenommen, daß die aus einer Instanz $\mathcal{F}$ konstruierte Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathfrak{RC}$-SAT erfüllbar ist, zum Beispiel durch θ. Dann erfüllt die Belegung β, die man erhält, wenn man jede Variable x_i mit *wahr* belegt, für die $\{\ \mathsf{e}_{23}\ \}(a, b : \theta(x_i))$ gilt, und alle anderen mit *falsch*, die Instanz $\mathcal{F}$,

NOT-ALL-EQUAL-3-SAT $\Rightarrow$ $\mathfrak{RC}$-SAT:
Angenommen, $\mathcal{F}$ ist eine positive Instanz von NOT-ALL-EQUAL-3SAT und $C_{\mathcal{F}}$ ist die von $\mathcal{F}$ ausgehend konstruierte Instanz von $\mathfrak{RC}$-SAT. Dann es gibt eine Realisation θ, die mit allen Constraints in $C_{\mathcal{F}}$ konsistent ist. Wähle zum Beispiel $a^\theta = (0,0)$ und $b^\theta = (0,2)$. Weiter, wenn β eine konsistente Belegung von $\mathcal{F}$ ist, so wähle $x_i^\theta = (1,0)$ und $\bar{x}_i{}^\theta = (-1,0)$, falls $x_i{}^\beta$ *wahr* ist, und $x_i^\theta = (-1,0)$ und $\bar{x}_i{}^\theta = (+1,0)$, falls $x_i{}^\beta$ *falsch* ist.
Diese Konstellation erfüllt offensichtlich

$$\begin{array}{rcl} \{\ \mathsf{e}_{12}\ \}(a^\theta, a^\theta : b^\theta) \text{ und } & \{\ \mathsf{rl},\ \mathsf{ll}\ \}(a^\theta, b^\theta : x_i^\theta), & \\ \{\ \mathsf{rl},\ \mathsf{ll}\ \}(a^\theta, b^\theta : \bar{x}_i^\theta) \text{ und } & \{\ \mathsf{sc}\ \}(x_i^\theta, \bar{x}_i^\theta : a^\theta) & \text{für alle } x_i. \end{array}$$

Die Constraints $\{\mathsf{e}_{12}, \mathsf{elc}, \mathsf{erc}\}(y_1^\theta, y_2^\theta : b^\theta)$ gelten, weil $\mathrm{Rel}((-1,0),(-1,0) : (0,2)) = \mathrm{Rel}((1,0),(1,0) : (0,2)) = \mathsf{e}_{12}$, und $\mathrm{Rel}((-1,0),(1,0) : (0,2)) = \mathsf{elc}$ und $\mathrm{Rel}((1,0),(-1,0) : (0,2)) = \mathsf{erc}$. Die Constraints $\{\mathsf{e}_{12}, \mathsf{e}_{23}, \mathsf{eq}\}(z_{k1}^\theta, z_{k2}^\theta : z_{k3}^\theta)$ gelten gemäß der Konstruktion. Weil nach Voraussetzung für alle k mindestens einer der Werte $z_{k1}^\theta, z_{k2}^\theta, z_{k3}^\theta$ *wahr* ist und mindestens einer *falsch*. Also ist auch mindestens einer der Werte $z_{k1}^\theta, z_{k2}^\theta, z_{k3}^\theta$ gleich $(-1;0)$, mind ein anderer gleich $(1;0)$ und der dritte gleich $(-1;0)$ oder $(1;0)$. in jedem Fall koinzidieren genau zwei Elemente und das dritte ist verschieden.

$\square$(Theorem 145)

Korollar 147 (NP-Vollständigkeit von $\mathfrak{E}q$) *:*
$\mathfrak{E}q$ -SAT ist NP-vollständig

Beweis:
Es ist noch zu zeigen, daß $\mathfrak{E}q$ -SAT in NP liegt. Wenn es gibt ein Modell eines gegebenen $\mathfrak{E}q$ -CSP gibt, dann gibt es ein Modell mit Instantiation in natürlichen Zahlen, weil es nur eine endliche Anzahl n an Elementen gibt, und es zu jeder höchstens n-elementigen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ eine injektive Abbildung gibt, die diese Menge auf die Menge $\{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$ abbildet. So eine Abbildung erhält die Gleichheit. Eine nichtdeterministisch geratene Lösung kann in LOGSPACE, also in P repräsentiert werden. Das Überprüfen, ob die Gleichheit gilt wie von den Constraints vorgegeben, ist ebenfalls in linearer Zeit möglich, da je Constraint nur 3 Vergleiche nötig sind.

□(Korollar 147)

7.3 NP-Härte von Basiskalkülen

Es liegt nahe zu vermuten, daß wenigstens auf vollständig definierten Konstellationen des Basiskalküls, also solchen, bei denen die Relation zwischen je drei Elementen als Basisrelation definiert ist, polynomielle Algorithmen zur Konsistenzentscheidung existieren, denn die Anzahl der möglichen Instantiationen wird durch diese Beschränkung stark reduziert. Man könnte dann $(\mathsf{RC})^{\cup}$-SAT in exponentieller Zeit lösen, indem man per Backtracking-Algorithmus alle in einer Relation enthaltenen Basisrelationen der Reihe nach durchtestet. Wird dabei eine konsistente Konstellation von Basisrelationen gefunden, ist auch das CSP mit den zusammengesetzten Relationen konsistent. Wurden nach Durchprobieren aller Möglichkeiten nur inkonsistente Konstellationen gefunden, war auch das ursprüngliche CSP inkonsistent. Außerdem handelt es sich bei einigen in der Praxis auftretenden Konsistenzproblemen um CSPs über dem Basiskalkül, etwa, wenn es darum geht zu prüfen, ob eine gewünschte Anordnung realisierbar ist.

Leider ist das Ergebnis für einige der hier vorgestellten Kalküle auch auf dem präzisen Level der Basisrelationen nicht gerade ermutigend:

7.3.1 NP-Härte von $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$

Theorem 148 (Theorem von Smirkowsky-Cabellan [2]) *:*
$\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$-SAT ist NP-hart.

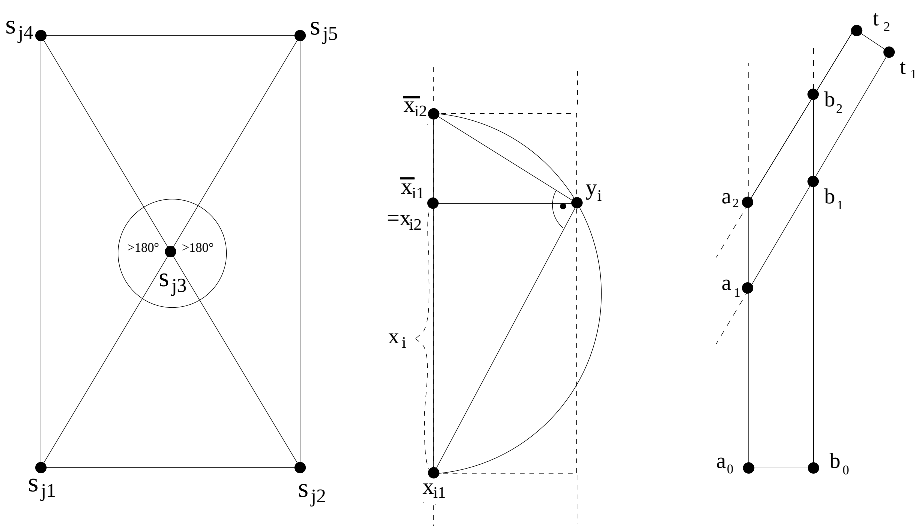
Beweis:
Der folgende NP-Vollständigkeitsbeweis für Kalkül $\mathfrak{RC}$ benutzt eine Transformation von dem als NP-vollständig bekannten aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblem 3SAT nach $\mathfrak{RC}$-SAT.
Der Beweis benutzt die Methode des component design (vgl. Hierzu [MRG79]), das heißt, für jede Instanz (Formel) $\mathcal{F}$ von 3SAT, wird eine Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathfrak{RC}$ in polynomieller Zeit konstruiert, die aus mehreren Komponenten besteht. Als ***($\mathfrak{RC}$-)Komponenten*** bezeichne ich Mengen von Elementen in $C_{\mathcal{F}}$ und $\mathfrak{RC}$-Constraints (Relationen) zwischen ihnen, die eine inhaltlich zusammengehörige geometrische Konstruktion, eine ***Modellkomponente*** beschreiben. Jede ***Einzelkomponente*** steht dabei beispielsweise für eine Variable, ein Literal oder eine Klausel der Formel $\mathcal{F}$. Die Vereinigung der Komponenten, die für Bestandteile der gleichen Kategorie stehen, bilden mit allen Constraints zwischen ihnen eine ***funktionale Einheit*** , beispielsweise bilden alle Komponenten für Variablen eine funktionale Einheit (V), alle Komponenten für Klauseln eine andere (C). Die Menge der Elemente in funktionalen Einheiten, also in Komponenten mit gleicher Funktion bilden eine ***funktionale Menge*** .
Die Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ wird so konstruiert, daß sie erfüllbar ist, genau dann, wenn $\mathcal{F}$ positiv entschieden wird.
Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{RC}$-SAT NP-hart ist.

<u>Grundidee:</u>
Mein Beweis beruht auf der Idee, die Wahrheitswerte durch Streckenlängen zu interpretieren. Wenn in einer Interpretation die Strecke länger als eine gewisse Länge l ist, entspricht dem eine Belegung des entspechenden Literals in der entsprechenden 3-SAT-Formel mit *wahr*. Als Erfüllbarkeitstest (satisfaction testing component) dient dann eine funktionale Einheit S, die testet, ob die Summe der Strecken je Klausel eine gewisse Mindestlänge übertrifft, die nur von *falsch* + *falsch* + *falsch* nicht erreicht werden kann. Genau wenn 3-SAT($\mathcal{F}$) nicht erfüllbar ist, d. h. jede Belegung ergibt in mindestens einer Klausel 3 mal *falsch*, dann ist diese Konstruktion nicht erfüllbar, und dann ist die entsprechende Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathfrak{RC}$ nicht erfüllbar.

<u>Die wichtigsten Einzelkomponenten:</u>
Die funktionale Einheit für den Erfüllbarkeitstest setzt sich aus Einzelkomponenten S_j für jede Klausel C_j zusammen, die wie in Figur Abbildung 7.2.a dargestellt aussehen:

$s_{j1}, s_{j4}, s_{j5}, s_{j2}$ bilden ein Rechteck, s_{j3} ist der Mittelpukt. Dies kann leicht durch Basisrelationen sichergestellt werden. Genau dann, wenn die Strecke $s_{j1}s_{j4}$ links (Summe der drei Strecken einer Klausel) größer ist als die waagrechte Strecke $s_{j1}s_{j2}$ ist, dann ist der eingezeichnete Winkel $\measuredangle s_{j2}, s_{j3}, s_{j5}$ zwischen 90 und 180, was durch der Constraint { rſ }$(s_{j2}, s_{j3} : s_{j5})$ in $C_{\mathcal{F}}$ gefordert werden kann. Die Idee besteht nun darin, durch das Grundgerüst sicherzustellen, daß die Länge der waagrechte Strecke $dist(s_{j1}, s_{j2}) = 3l$ beträgt. Wenn Wahrheitswerte nun als Antworten auf die Frage: „Ist die Streckenlänge größer als die Grundlänge l?“ interpretiert werden, dann ist die Frage: „Ist die Summe der drei Strecken größer als die dreifache Grundlänge $3l$?“ eine korrekte Interpretation der Klausel. Denn die Streckensumme kann nur dann größer als die dreifache Grundlänge sein, wenn schon mindestens eine Strecke größer als die Grundlänge ist, andererseits, da ja die einzelnen Strecken in ihrer Länge nicht grundsätzlich nach oben begrenzt sind, reicht schon eine Strecke aus, die hinreichend lang ist, um dies zu erreichen.

Eine Konstruktion für die Wahrheitswerte muß sicherstellen, daß zu jedem Wahrheitswert der Variablen x der komplementären Wahrheitswert für $\bar{x}$ immer auf die gleiche Weise entsteht. Unter Ausnutzung der Relation {lp} "‘rechter Winkel”, erreicht dies die in Figur Abbildung 7.2b. dargestellte Konstruktion:



a. Die Komponente S_j b. Die Komponente V_i c. Das Transferschema

Abbildung 7.2: Die wichtigsten Einzelkomponenten: a. Die Erfüllbarkeitskomponente S_j b. Die Variablenkomponente V_i c. Die Transferkomponente $T_{L_{jl}}$ oder $T_{C_{jl}}$ oder T_{S_j}

Um alle Belegungen von $\mathcal{F}$ interpretieren zu können, braucht man für jede Variable $x_i (i < n)$ Elemente x_{i1}, x_{i2}, deren Interpretationen die Strecke für den Wahrheitswert von x_i festlegen, und Elemente $\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}$, deren Interpretationen

die Strecke für $\bar{x}_i$ festlegen. Meine Konstruktion verwendet zusätzlich für jede Variable ein Element y_i, das bei der Umwandlung des Wahrheitswertes von x_i nach $\bar{x}_i$ hilft.
Dazu konstruiere ich zu jeder Variablen die Einzelkomponente V_i, bestehend aus der Menge $V_i := \{x_{i1}, x_{i2}, \bar{x_{i1}}, \bar{x_{i2}}, y_i\}$ und den Constraints

$$
\begin{aligned}
&\{\ e_{23}\ \}(x_{i1}, x_{i2} : \bar{x}_{i1}),\\
&\{\ sf\ \}(x_{i1}, \bar{x}_{i1} : x_{i2}),\\
&\{\ rp\ \}(x_{i1}, \bar{x}_{i1} : y_i),\\
&\{\ sf\ \}(x_{i1}, x_{12} : \bar{x}_{i2}),\\
&\{\ rp\ \}(x_{i1}, \bar{x}_{i1} : x_{12}),\\
&\{\ orc\ \}(x_{i1}, \bar{x}_{i2} : y_i),\\
&\{\ e_{12}\ \}(x_{i2}, \bar{x}_{i1} : \bar{x}_{i2}),\\
&\{\ e_{12}\ \}(x_{i2}, \bar{x}_{i1} : y_i),\\
&\{\ rl\ \}(\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2} : y_i),\\
&\{\ rl\ \}(x_{i2}, \bar{x}_{i2} : y_i)
\end{aligned}
$$

und ihren Permutationen.

Außer diesen Komponenten für Variablenbelegung und Erfüllbarkeitstest sind weitere Komponenten nötig, die die Wahrheitswerte von den Variablenbelegungen bis hin zum Erfüllbarkeitstest übertragen. Die polynomielle Konstruktion von $C_{\mathcal{F}}$ konstruiert Einzelkomponenten für jede Variable, jedes Literalvorkommen in einer Klausel, jede Klausel und schließlich für den Erfüllbarkeitstest,wobei die Übertragung der Wahrheitswerte (Streckenlängen) von Komponente zu Komponente durch die Einführung von Transferkomponenten (Transfer von parallelen Linien) sichergestellt wird. Die Transferkomponenten bestehen aus vier Punken, die ein Parallelogramm blden und vier Punkten, die diese Parallelität durch rechte Winkel begründen. (Vgl. Abbildung 7.2c., Definition 152.) Dabei wird ausgenutzt, daß in jeder geometrischen Interpretation von $C_{\mathcal{F}}$ gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm gleich lang sind.
Für die Übertragung der Wahrheitswerte ist es daher notwendig, daß auch die Elementepaare parallel zueinander liegen. Dazu werden mit Hilfe von $\{lp\}$ und $\{sf\}$ Constraints in $C_{\mathcal{F}}$ konstruiert, die sicherstellen, daß jeweils die Elemente, die auf der gleichen Stufe in der Übertragungshierarchie stehen, von einer Grundlinie aus gesehen senkrecht übereinander zu realisieren sind; diese Teilmengen von Elementen will ich jeweils ***Senkrechte*** nennen.
Der wesentliche Trick meines Beweises ist folgender:
Damit die Elemente der Komponenten sich nicht gegenseitig stören, das heißt, damit die Übertragung unabhängig von der Länge der Strecken (d.h. unabhängig vom Wahrheitswert) funktioniert, werden die Einzelkomponenten möglichst weit voneinander entfernt definiert, und zwar, indem alle Constraints so konstruiert werden, daß in Realisierungen der Winkel zwischen Punkten in

verschiedenen Einzelkomponenten nahe bei 0^ooder nahe bei 180^oliegt.
Damit sieht jede geometrische Interpretation von $C_{\mathcal{F}}$ etwa so aus wie in Figur Abbildung 7.3 beschrieben.

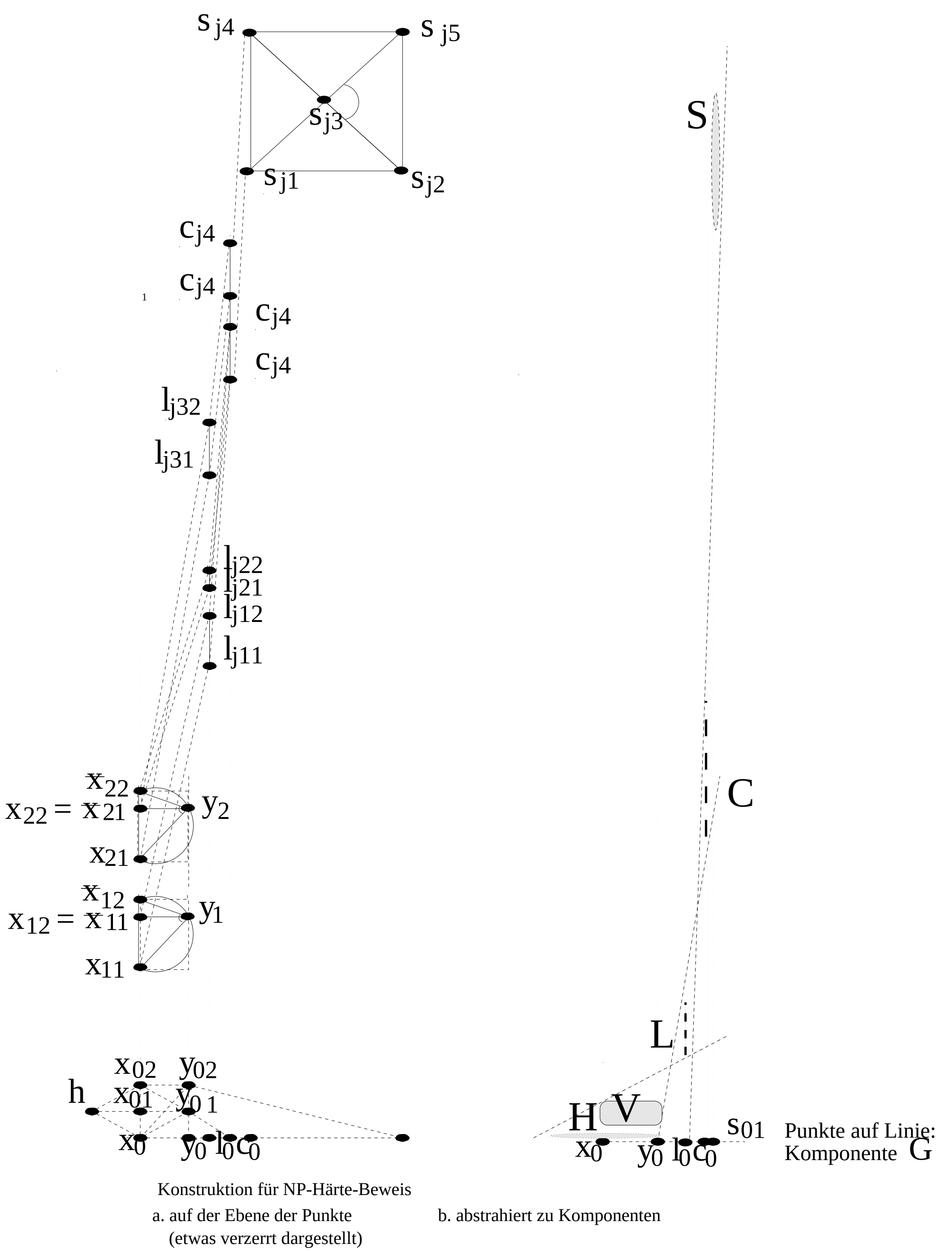


Abbildung 7.3: Das Schema der Konstruktion

Überblick über den Beweis

Die bisherigen Überlegungen bedeuten, daß die einer erfüllbaren Formel $\mathcal{F}$ entspechende Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ erfüllbar ist, wenn $C_{\mathcal{F}}$ mindestens die bisher beschriebenen Komponenten in der bisher beschriebenen Art enthält. Wegen der Bedeutung dieser Aussage, fasse ich sie als Lemma zusammen:

Lemma 149 (Belegungslemma) *:*
Sei $\mathcal{F} = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$ *mit Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *und* $C_{\mathcal{F}}$ *eine Konstellation, die die Komponenten* S_j *für* $j \leq m$, V_i *für* $i \leq n$ *und zusätzliche Komponenten enthält, die :*

$$\begin{aligned} dist(s^\theta_{j1}, s^\theta_{j2}) &= 3l \\ dist(s^\theta_{j2}, s^\theta_{j5}) &= dist((z_{j1})^\theta_1, (z_{j1})^\theta_1) + dist((z_{j2})^\theta_1, (z_{j2})^\theta_2) + dist((z_{j3})^\theta_1, (z_{j3})^\theta_2). \end{aligned}$$

erreichen, wobei $(z_{jk})_\iota$ *für das Element* $x_{i\iota}$ *oder* $\bar{x}_{i\iota}$ *steht, das im* j*-ten Literal an* k*-ter Position vorkommt. Wenn* $C_{\mathcal{F}}$ *durch* θ *erfüllbar ist, so bildet die Belegung* β *mit*

$$x^\beta := \text{wahr} \iff dist(x^\theta_{i1}, x^\theta_{i2}) > l$$

eine erfüllende Belegung.

Beweis:
Wenn nämlich ${C_{\mathcal{F}}}^\theta$ alle Constraints erfüllt, dann gilt für jede Klausel $j \leq m$ in der zugehörigen Erfüllbarkeitstestkomponente $\{\ \Upsilon\!\int\ \}(s_{j2}, s_{j3} : s_{j5})$, und daher die Strecke $dist(s^\theta_{j2}, s^\theta_{j5}) > dist(s^\theta_{j2}, s^\theta_{j5}) = 3l$. Da sie in einer Realisation nach Voraussetzung der Summe von der drei zugehörigen Literalstrecken entspricht, ist mindestens eine Streckenlänge des zugehörigen Literals größer als die Grundlänge l, wie oben nachgewiesen, das heißt mindestens ein Literal in jeder Klausel ist *wahr.*

$\square$(Lemma 149)

Durch eine konkrete Angabe des Grundgerüsts G (auch eine funktionale Einheit) und der Transferkomponenten, die die Übertragung der Streckenlängen erreichen, ist damit die eine Richtung gezeigt. Die umgekehrte Richtung werde ich beweisen, indem ich eine nur von der Syntax der Formel $\mathcal{F}$ abhängende Konstruktion für eine vollständige Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ angebe, die mindestens die bisher beschriebenen Komponenten, das Grundgerüst und die Transferkomponenten enthält, und zwar so, daß zu einer erfüllbaren Formel $\mathcal{F}$ eine erfüllbare Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ konstruiert wird.
Der Rest des Beweises teilt sich nun in zwei große Teile: Zuerst gebe ich die

Konstruktion $C_{\mathcal{F}}$ an, wobei ich nachweise, daß sie die Streckenübertragung erreicht, und im zweiten Teil weise ich nach, daß $C_{\mathcal{F}}$ erfüllbar ist, wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist.
Für diesen konkreten Nachweis einer solchen Erfüllung ist es am einfachsten, basierend auf einer erfüllenden Belegung β die Elemente der Reihe nach zu realisieren, zuerst innerhalb des Grundgerüsts (Mengen G = Grundlinienelemente und H = Hilfselemente; vgl. Abbildung **??**), dann stufenweise unter Einbeziehung der funktionalen Einheiten für die Variablen (V bestehend aus den Senkrechten X = Variablenelemente und Y = Negierungselemente), für die Literale (Senkrechte L), für die Klauseln (Senkrechte C), für die Erfüllbarkeitstests (Senkrechten S_1, S_3 und S_2) und schließlich für den Transfer (Menge T). Daher bezeichne ich T als später in der Hierarchie des Aufbaus als S, S später als C usw.
Die Konstruktionsmethode ist so geschickt gewählt, daß die Erfüllbarkeit der Relationen nicht von der Belegung abhängt, außer dort, wo dies notwendig ist, nämlich bei den Relationen innerhalb der Erfüllbarkeitstestkomponenten. Dann nämlich bilden die Basisrelationen zwischen Tripeln von Punkten einer beliebigen solchen Realisierung die Konstellation $C_{\mathcal{F}}$. [3]

<u>Vorbemerkungen zur Konstruktion</u>

Die derart konstruierte Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ sollte sinnvollerweise permutatitons- und kompositionsvollständig sein, weil es sonst völlig unabhängig von $\mathcal{F}$ unerfüllbar wäre (und damit nicht für eine Reduktion geeignet). Da es sich um ein CSP über $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ handelt, muß für jedes Tripel ein Basisconstraint auftauchen. Für eine konkrete Angabe von $C_{\mathcal{F}}$ genügt es aber wegen der Permutationsvollständigkeit, für jede dreielementige Teilmenge der Elemente nur ein Constraint anzugeben, da die Constraints für die Tripel $(e_1, e_1 : e_2)$ als Schnitt der Zylindrifikationen

$$\mathit{Rel}\ (e_1, e_1 : e_2) = \bigcap_{x \in C_F} (c_1(\ \mathit{Rel}\ (x, e_1 : e_2)) \cap c_2(\ \mathit{Rel}\ (e_1, x : e_2)))$$

bestimmt sind, und die übrigen sich als Permutationen eindeutig ergeben. ($\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ ist permutationsvollständig.)
Da $\mathfrak{RC}$ invariant unter Drehung ist, kann ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit in meiner Konstruktion annehmen, daß die Punkte der Grundlinie von links nach rechts angeordnet sind, und die Variablenpunkte oberhalb davon. Wenn im folgenden Richtungsbezeichnungen auftauchen, beziehen sie sich immer auf diese Konvention.

[3] Es mag daher beim Studium des detaillierten Beweises hilfreich sein, parallel zur Beschreibung der Konstruktion das nach dem Ende dieser Konstruktion angegebene Modell zu studieren und dabei anhand des Modells die Constraints nachzuvollziehen.

Meine Konstruktion erreicht, daß die Hierarchie der funktionalen Mengen in folgender Weise reflektiert wird: Alle Elemente einer nachfolgenden Hierarchiestufe werden also rechts oberhalb von allen Elementen der vorigen Hierarchiestufen realisiert. Da die Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ eine vollständige Beschreibung der die Tripel beschreibenden Relationen umfasst, wird sie entsprechende Basisconstraints enthalten. Wie ein Constraint für $(a, b : c)$ aussieht, wenn c rechts oberhalb von a und b liegt, hängt davon ab, wie das Elementepaar (a, b) interpretiert wurde.

Der erste Trick meines Beweises ist, die Punkte so weit entfernt zu realisieren, daß die Relation nur davon abhängt, ob die Gerade $\ell(a^\theta, b^\theta)$ auf- oder absteigend ist (je nachdem, ob die Steigung ≥ 0 oder $\in$ $[-infty, 0[$ ist, vgl. Figur Abbildung 7.4.a). Sie werden nämlich so interpretiert werden, daß sie oberhalb aller Geraden liegen, die durch die bisher interpretierten Punkte bestimmt sind. Unter der Annahme, daß b^θ rechts von a^θ liegt, ergibt sich daraus für ein neues Element bei allen aufsteigenden Paaren (a, b) der Constraint $\{$ lf $\}(a, b : c)$, bei allen absteigenden Paaren der Constraint $\{$ lb $\}(a, b : c)$. Man stelle sich einfach alle bisherigen Elemente fast auf einen Punkt zusammengeschrumpft vor. (Vgl. Abbildung 7.4b.) Der zweite Trick meines Beweises ist, daß die Menge der Elementepaare, deren zugehörige Gerade in der Realisierung ab- bzw. aufsteigend ist, sich rein syntaktisch festlegen läßt. Offenbar läßt sich diese Eigenschaft durch die Constraints $\{$ rf $\}(a_0, a : b)$, bzw. $\{$ irc $\}(a_0, a : b)$ und $\{$ sc $\}(a_0, a : b)$ erreichen, wenn a_0 das zu der Senkrechten von a gehörende Grundlinienelement ist, und b ein Element derselben oder einer weiter rechts liegenden Senkrechten ist. Die Reihenfolge der Senkrechten und die Reihenfolge der Elemente auf den Senkrechten hängen dabei nicht von der Belegung ab, sondern nur von der syntaktischen Form von $\mathcal{F}$ – sie entsprechen der Reihenfolge, in der die entsprechenden Elemente in $\mathcal{F}$ auftauchen. Ich gebe explizit Ordnungen an, die diese Sachverhalten beschreiben, wobei ich die Ordnungen nur durch die Syntax von $\mathcal{F}$ bestimmt wird.
Basierend auf diesen Ordnungen werden entsprechende Constraints konstruiert, sodaß spätere Punkte zu weiter rechts liegenden Senkrechten gehören. Der Raumbereich, der nach Instantiation von a und b für Realisierungen von späteren Elementen c möglich ist, ist jeweils ein nach rechts oben hin ***offener Keil*** , der von zwei Halbgeraden begrenzt wird. Eine dieser Halbgeraden führt senkrecht nach oben, die andere ist steil aufsteigend. Ihre Steigung entspricht der steilsten durch bereits instanzierte Punkte bestimmbaren Steigung. Später wird bedeutsam werden, daß dadurch zugleich sichergestellt wird, daß die Reihenfolge der Steigungen von Punktepaaren nicht von der Belegung, sondern nur von der Syntax von $\mathcal{F}$ abhängt. Die Constraints von $C_{\mathcal{F}}$ werden erreichen, daß jeweils nach jeder Stufe (nach Abschluß der Interpretation der funktionalen Mengen für Variablen, Literale und Klauseln), alle nachfolgenden Elemente

im Bereich des offenen Keils von der bis dahin konstruierten Menge liegen. In Abbildung 7.4 ist exemplarisch der offene Keil von $H \cup V \cup L$ schraffiert.
Aufgrund dieser beiden Tricks lassen sich alle Constraints in $C_{\mathcal{F}}$ rein syntaktisch konstruieren und hängen damit nicht von β ab.

Schließlich werde ich nachweisen, daß man die korrekte Übertragung der Wahrheitswerte durch Constraints sicherstellen kann, die erreichen, daß bestimmte Punkte ein Parallelogramm bilden. Hier geht wesentlich in den Beweis ein, daß die Relation der Parallelität in $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ Satz **??** definierbar sind. In $\mathfrak{C}v$ geht dies bekanntlich **??** nicht. Für die Definition der Parallelität benötige ich jedoch zusätzliche Transferelemente, deren Relationen untereinander und mit Nichttransferelementen ebenfalls syntaktisch konstruiert werden, unabhängig von β.

Hilfskonstrukte:

Der Beweis wird trotz der vielen Einzelkomponenten dadurch ein wenig vereinfacht, daß es große Mengen von Elementen gibt, für deren Elemente die gleichen Constraints wie zwischen den Elementen anderer Mengen gelten, beispielsweise stehen alle Punkte, die im offenen Keil liegen mit den vorigen jeweils in den gleichen Relationen. Hierfür führe ich eine vereinfachende Schreibweise ein:

Definition 150 (Constraints auf Mengen von Elementen) *:*
Seien M_1, M_2 und M_3 Mengen von Elementen, R eine Relation. Dann bezeichne $\mathsf{R}\ (M_1, M_2 : M_3)$ die Menge (Konjunktion) von allen Constraints $\mathsf{R}\ (m_1, m_2 : m_3)$, $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, m_3 \in M_3$.

Häufig werde ich dabei die folgenden funktionale Mengen verwenden:
Grundelemente G, Variablenelemente $V := X \cup Y$, Literalelemente L, Klauselkombinierungselemente C, Erfüllbarkeitstestelemente $S := S_1 \cup S_3 \cup S_2$, Transferelemente $T := T_L \cup T_C \cup T_S$ und Nichttransferelemente $N := G \cup H \cup V \cup L \cup C \cup S$. Die Gesamtheit aller Elemente in $C_{\mathcal{F}}$ ist $C_F = T \cup N$
Jedes Element von $C_{\mathcal{F}}$ ist also entweder Transferelement oder Nichttransferelement.

Bevor ich auf den Beweis im einzelnen eingehe, will ich noch einige Konstrukte vorstellen, die bei der Konstruktion von $C_{\mathcal{F}}$ immer wieder gebraucht werden.

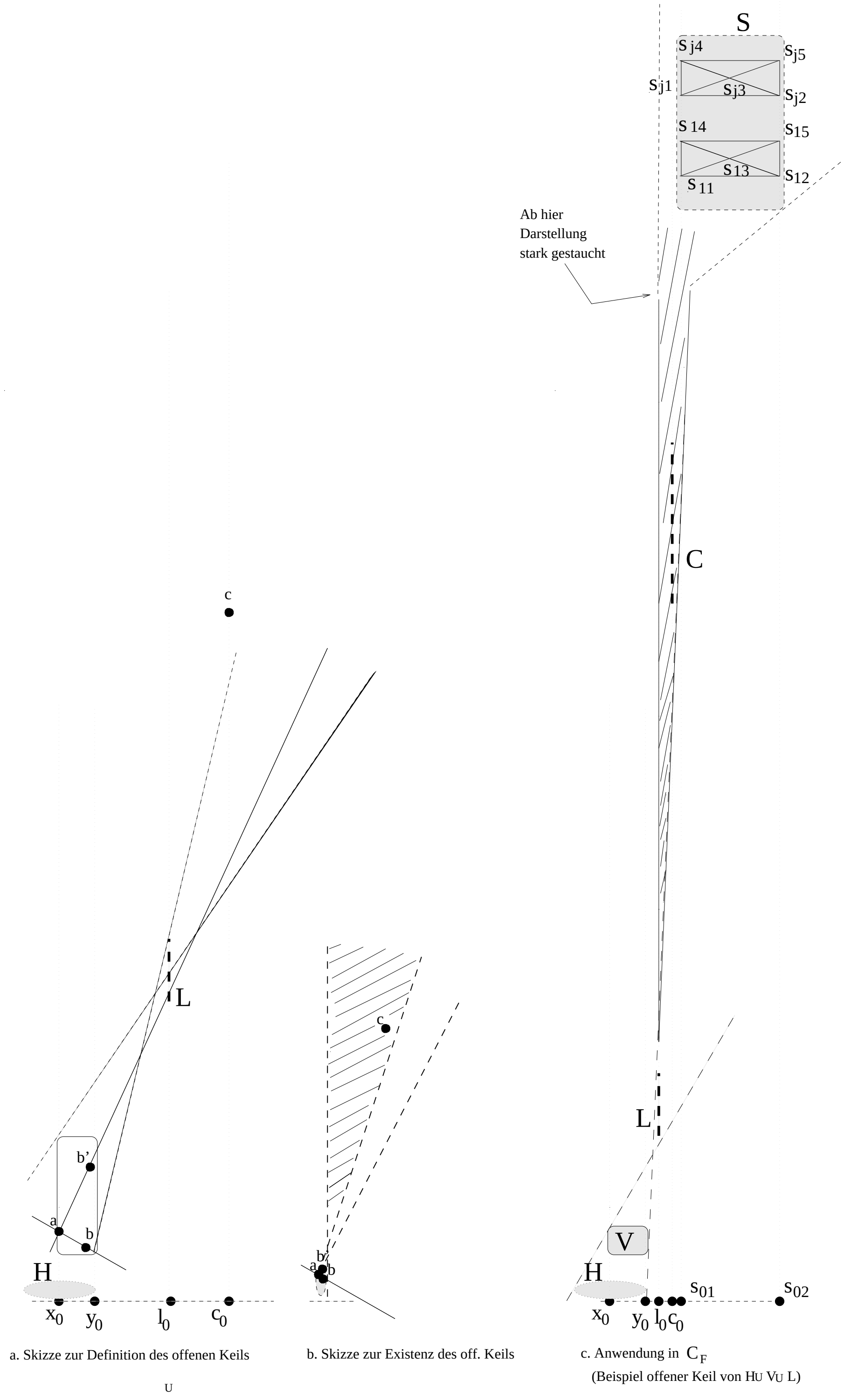


Abbildung 7.4: Der offene Keil einer Menge (hier exemplarisch von $H \cup V \cup L$) ist die Region der Punkte, die oberhalb aller durch Punkte dieser Menge definierten Geraden liegen. Für endliche Punktmengen ist er nicht leer, da es eine maximale Steigung gibt.

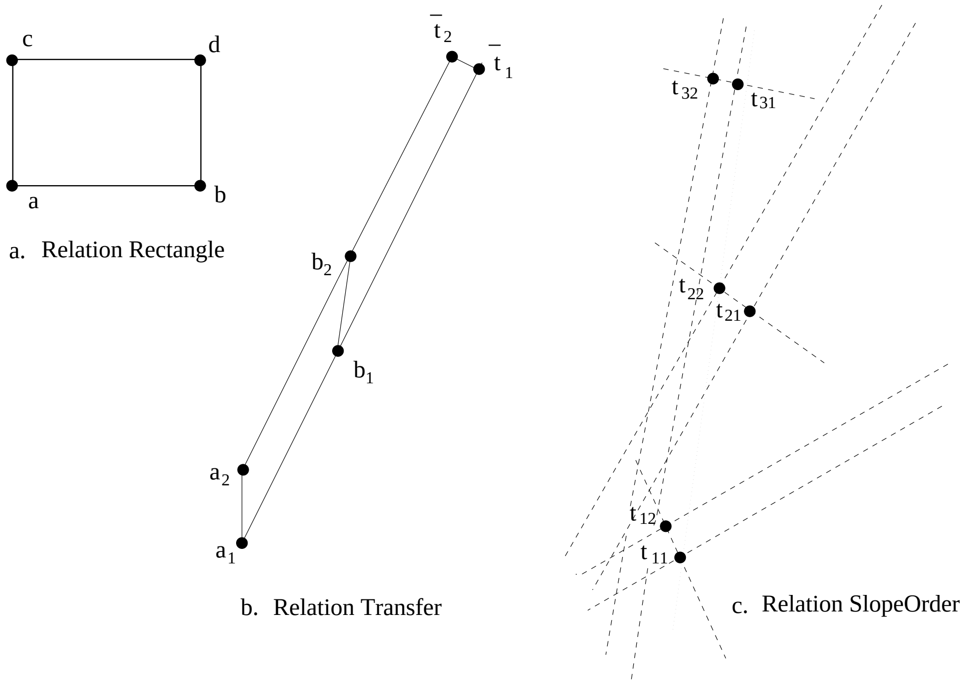


Abbildung 7.5: Einige benötigte Konstrukte

Definition 151 (Relation Rectangle) *(vgl. Abbildung 7.5.a):*
Im folgenden sei $\mathfrak{Rectangle}\ (a, b : c, d)$ *eine Kurzform der Constraint*

$$\{\ \mathfrak{ll}\ \}(a, b : c),\quad \{\ \mathfrak{lp}\ \}(a, b : d),\quad \{\ \mathfrak{rp}\ \}(a, c : d),\quad \{\ \mathfrak{rp}\ \}(c, d : b)$$

und aller ihrer Permutationen,
die erreichen, daß $\ell(a^\theta, b^\theta)||\ell(c^\theta, d^\theta)$ *liegt und die vier Punke ein Rechteck* $a^\theta b^\theta d^\theta c^\theta$ *bilden.*

Definition 152 (Relation Transfer) *(vgl. Abbildung 7.5.a):*
Im folgenden sei $\mathfrak{Transfer}\ (a_1, a_2 : b_1, b_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ *eine Kurzform der Constraints*

$$\begin{array}{ll}
\{\ \mathfrak{rf}\ \}(a_1, a_2 : \{b_1, b_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2\}), & \\
\{\ \mathfrak{lf}\ \}(a_1, b_1 : \{b_2, \bar{t}_2\}), & \{\ \mathfrak{lf}\ \}(a_2, b_1 : \{b_2, \bar{t}_1, \bar{t}_2\}), \\
\{\ \mathfrak{sf}\ \}(a_1, b_1 : \bar{t}_1), & \{\ \mathfrak{sf}\ \}(a_2, b_2 : \bar{t}_2), \\
\{\ \mathfrak{lf}\ \}(a_1, b_1 : \bar{t}_2), & \{\ \mathfrak{rf}\ \}(a_2, b_2 : \bar{t}_1), \\
\{\ \mathfrak{rf}\ \}(a_1, b_2 : \{\bar{t}_1, \bar{t}_2\}), & \{\ \mathfrak{rf}\ \}(b_1, b_2 : \{\bar{t}_1, \bar{t}_2\}), \\
\{\ \mathfrak{lp}\ \}(\{a_1, b_1\}, \bar{t}_1 : \bar{t}_2), & \{\ \mathfrak{rp}\ \}(\{a_2, b_2\}, \bar{t}_2 : \bar{t}_1)
\end{array}$$

und aller ihrer Permutationen, die erreichen, daß $\bar{t}_1^\theta \bar{t}_2^\theta$ *rechts vor* $b_1^\theta b_2^\theta$ *rechts vor* $a_1^\theta a_2^\theta$ *liegt,* $\ell(a_1^\theta, b_1^\theta)||\ell(a_2^\theta, b_2^\theta)$ *gilt und daß* $a_1^\theta b_1 m.\bar{t}_1^\theta$ *und* $a_2^\theta b_2^\theta \bar{t}_2^\theta$ *jeweils kolinear liegen.*

Dieses Konstrukt wird immer in Zusammenhängen auftauchen, in denen $\ell(a_1^\theta, a_2^\theta)||\ell(b_1^\theta, b_2^\theta)$ gilt, und deshalb sicherstellen, daß die Punkte *abcd* ein Parallelogramm bilden, und daher wird in jeder Interpretation θ von $C_{\mathcal{F}}$ für die Streckenlängen

$$dist(b_1^\theta, b_2^\theta) = dist(a_1^\theta, a_2^\theta)$$

gelten. Also ist dieses Konstrukt wichtig für die Übertragung von Wahrheitswerten.

Definition 153 (Relation Slope order) *(vgl. Abbildung 7.5.c):*
Im folgenden sei $\mathtt{SlopeOrder}\,(t_{11}, t_{12} : t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32})$ *eine Kurzform der Constraints*
$\{\ \mathtt{rf}\ \}(t_{11}, t_{12} : \{t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}\})$ [4],
$\{\ \mathtt{lf}\ \}(\{t_{11}, t_{12}\}, t_{21} : t_{22})$,
$\{\ \mathtt{lf}\ \}(\{t_{11}, t_{12}\}, t_{31} : t_{32})$ [5],
$\{\ \mathtt{lf}\ \}(\{t_{21}, t_{22}\}, t_{31} : t_{32})$ [6],
$\{\ \mathtt{lf}\ \}(\{t_{11}, t_{12}\}, \{t_{21}, t_{22}\} : \{t_{31}, t_{32}\})$,
$\{\ \mathtt{rf}\ \}(t_{21}, t_{22} : \{t_{31}, t_{32}\})$ [7]
und aller ihrer Permutationen,
die beschreiben, daß t_{31}, t_{32} *rechts vor* t_{21}, t_{22} *rechts vor* t_{11}, t_{12} *liegt, und daß* t_{1i}, t_{2j}, t_{3k} *jeweils auf einem weiten Linksbogen liegen.*

Diese Konstellation wird benötigt werden, um die Constraints zwischen den Transferelementen zu beschreiben.

7.3.2 Der Beweis im Detail

Sei nun $\mathcal{F} = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$ eine Formel mit n Variablen und m Klauseln. Im folgenden gebe ich eine polynomielle Konstruktion der Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathfrak{RC}$-SAT durch Angabe ihrer Elemente und Constraints an. Danach gebe ich eine Realisierung θ von $C_{\mathcal{F}}$ in der Ebene des $\mathbb{R}^2$ an, die zeigt, daß $C_{\mathcal{F}}$ erfüllbar ist, wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist, etwa durch eine Belegung β.
Parallel zur Konstruktion werde ich syntaktisch (basierend auf der Formel

[4] Nahe an $\{\mathtt{rp}\}$ zu denken
[5] Nahe an $\{\mathtt{lp}\}$ zu denken.
[6] Nahe an $\{\mathtt{lp}\}$ zu denken.
[7] Nahe an $\{\mathtt{sf}\}$ zu denken

$\mathcal{F}$) drei partielle Ordnungen $\preceq_o$ und $\preceq_r$ und $\preceq_t$ auf den Elementen von $C_{\mathcal{F}}$ einführen, die in die Konstruktion der Constraints eingehen wird. $\preceq_o$ und $\preceq_r$ werde ich auf allen Elementen $(N \cup T)$ definieren, $\preceq_t$ auf den Transferelementen T. $a \prec_o b$ soll bedeuten, daß unabhängig von der Belegung b^θ oberhalb von a^θ liegt, $a \prec_r b$ daß unabhängig von der Belegung b^θ rechts von a^θ liegt, $a \preceq_t b$ daß unabhängig von der Belegung die durch b gehende Transfergerade steiler ist als die durch a. (Die Ordnung $\preceq_t$ wird vorerst nicht benötigt und wird im späteren Verlauf erklärt.)
Dabei schreibe ich $a \prec_o b$ für $a \preceq_o b$, aber nicht $b \preceq_o a$, etc. Für $a \preceq_o b$ und $b \preceq_o a$ schreibe ich $a =_o b$, dies bedeutet nicht, daß beide Punkte identisch sind, sondern nur, daß sie gleich weit oben liegen.
Diese Ordnungen seien transitiv. Mit $a \preceq_o b$ und $b \preceq_o c$ sei auch $a \preceq_o c$ eingeführt, mit $a \prec_o b$ und $b \prec_o c$ oder $b \preceq_o c$ sei auch implizit $a \prec_o c$ eingeführt, mit $a \preceq_o b$ und $b \prec_o c$ sei auch $a \prec_o c$ eingeführt und mit $a =_o b$ und $b =_o c$ sei auch $a =_o c$ eingeführt. Analoge Beziehungen gelten für $\preceq_r$ und $\preceq_t$.

Definition 154 (Ordnung zwischen Mengen) *:*
$M_1 \prec_o M_2$ sei eine Kurzschreibweise für

$$m_1 \prec_o m_2 \text{ für alle } m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2;$$

entsprechend für $\prec_r, \prec_t$.

Unter Ausnutzung dieser syntaktisch eingeführten Ordnung werde ich wie einleitend erklärt Elementepaare syntaktisch als auf- und absteigende Paare festlegen.

In $C_{\mathcal{F}}$ gelte $X \prec_r Y \prec_r L \prec_r C \prec_r S_1 \prec_r S_3 \prec_r S_2 \prec_r T_L \prec_r T_C \prec_r T_S$
und $G \prec_o H \prec_o V \prec_o L \prec_o C \prec_o S \prec_o T_L \prec_o T_C \prec_o T_S$

Definition 155 (auf- und absteigende Paare) *(Vgl. Abbildung 7.6):*
*Ein Elementepaar (e_1, e_2) mit $e_1 \prec_r e_2$ heiße **aufsteigendes Paar** , genau dann, wenn $e_1 \preceq_o e_2$, andernfalls **absteigendes Paar** . Ein Elementepaar (e_1, e_2) mit $e_1 \preceq_r e_2$ heiße absteigendes Paar, genau dann, wenn $e_2 \prec_o e_1$.*

Beachte, daß die Paare mit umgekehrter Reihenfolge der Elemente, also $(e2, e1)$, wobei $e_1 \prec_r e_2$ weder auf- noch absteigende Paare sind. Insbesondere bilden bei dieser Bezeichnungsweise Paare von Elementen einer Senkrechten nie aufsteigende, nur absteigende Paare oder bezeichnungslose.

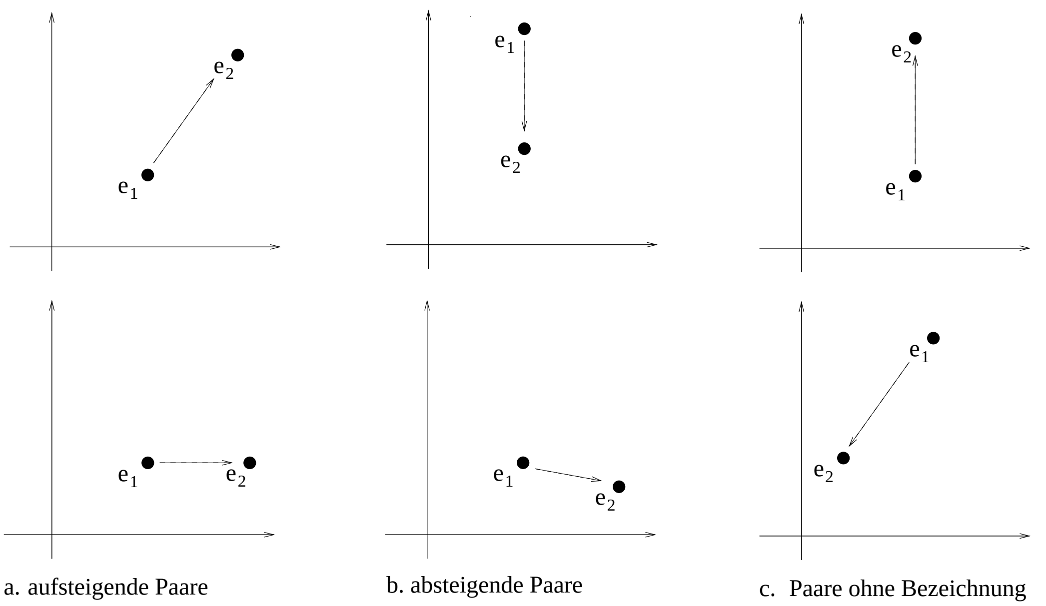


Abbildung 7.6: Auf-, absteigende und Paare ohne Bezeichnung. Die intendierte Semantik der syntaktischen Definition ist, daß in jeder Realisierung θvon $C_{\mathcal{F}}$ ein absteigendes Paar (e_1, e_2) so interpretiert sein muß, daß e_2^θ unterhalb oder rechts unterhalb von e_1^θ liegt und ein aufsteigendes Paar (e_1, e_2) so interpretiert sein muß, daß e_2^θ rechts oder rechts oberhalb von e_1^θ liegt. Paare, bei denen das zweite Element links des ersten liegt, bleiben ohne spezielle Bezeichnung.

Definition 156 (offener Keil) *:*
Im folgenden sei $\mathtt{open\ wedge}\,(\prec_o, \prec_r, A : B)$ *eine Kurzform der Constraints* $\{\ \mathfrak{lo}\ \}(a_1, a_2 : B)$, $\{\ \mathfrak{rf}\ \}(a_2, a_1 : B)$, *falls* (a_1, a_2) *absteigendes Paar,* $\{\ \mathfrak{lf}\ \}(a_1, a_2 : B)$, *falls* (a_1, a_2) *aufsteigendes Paar und* $\{\ \mathfrak{e}_{12}\ \}(a_1, a_2 : B)$, $\{\ \mathfrak{e}_{12}\ \}(a_2, a_1 : B)$, *falls* $a_1 =_r a_2$ *und* $a_1 =_o a_2$, *und aller ihrer Permutationen, die beschreiben, daß ganz* B *oben rechts von allen absteigenden Richtungen liegt.*

(vgl. Abbildung 6.4.)

1. Teil: Konstruktion der vollen Konstellation $C_{\mathcal{F}}$

<u>1. Grundgerüst:</u>

Ich führe in $C_{\mathcal{F}}$ die Grundlinienkomponente G ein, bestehend aus der Menge G der Grundelemente

$$x_0 \prec_r y_0 \prec_r l_0 \prec_r c_0 \prec_r s_{01} \prec_r s_{02}$$

und den Constraints $\{\ \mathfrak{sf}\ \}(g_1, g_2 : g_3)$ $(g_1 \prec_r g_2 \prec_r g_3 \in G)$. Bezüglich der Ordnung $\prec_o$ sind alle Elemente von G gleich.
Diese sechs Elemente bilden das "Rückgrat" der Konstruktion: Durch die später vorgestellten Constraints erreicht $C_{\mathcal{F}}$, daß von den Punkten der Grundlinie senkrecht (nach oben) die Linien ausgehen, auf denen die wichtigsten der weiterhin zu konstruierenden Punkte zu liegen kommen (nämlich alle bis auf Diagonalenschnittpunke, Transferpunkte und einem Hilfspunkt h des Grundgerüsts).
Zusätzlich zur Grundlinie gehört noch eine Komponente H aus Hilfselementen $H = \{h, x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}\}$ zum Grundgerüst, die sicherstellt, daß in jeder Realisierung θ von $C_{\mathcal{F}}$ der Abstand zwischen den Erfüllbarkeitstestgeraden dreimal so groß ist wie der Grundabstand $dist(x_0^\theta, y_0^\theta)$.
Im folgenden benutze ich folgende abkürzende Bezeichnungen für einige Mengen von Elementen:

$$
\begin{array}{rcll}
V_0 & := & \{x_0, y_0\}, & \\
S_0 & := & \{s_{01}, s_{02}\}, & \\
G & := & V_0 \cup S_0 \cup \{l_0, c_0\} & = \{x_0, y_0, l_0, c_0, s_{01}, s_{02}\}, \\
X_h & := & \{x_{01}, x_{02}\}, & \\
Y_h & := & \{y_{01}, y_{02}\}, & \\
H & := & X_h \cup Y_h \cup \{h\} & = \{h, x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02}\}, \\
X^+ & := & X \cup X_h \cup \{x_0\}, & \\
Y^+ & := & Y \cup Y_h \cup \{y_0\}, & \\
L^+ & := & L \cup \{l_0\}, & \\
C^+ & := & C \cup \{c_0\}, & \\
S_1^+ & := & S_1 \cup \{s_{01}\}, & \\
S_2^+ & := & S_2 \cup \{s_{02}\}. &
\end{array}
$$

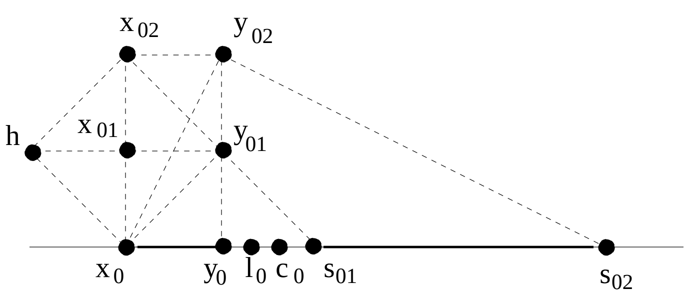
Lemma 157 (Multiplikatorfunktion von H) *(vgl. Abbildung 7.7):*
Die Komponente, bestehend aus den Elementen $H \cup V_0 \cup S_0$ mit den Constraints

$$
\begin{array}{rr}
\mathsf{Rectangle}\,(x_0, y_0 : x_{01}, y_{01}), & \mathsf{Rectangle}\,(x_0, y_{01} : h, x_{02}) \\
\textit{und}\ \ \mathsf{Rectangle}\,(x_{01}, y_{01} : x_{02}, y_{02}), & \{\ \mathsf{sb}\ \}(x_{01}, y_{01} : h) \\
\{\ \mathsf{rp}\ \}(x_0, y_{01} : s_{01}) & \textit{und}\{\ \mathsf{rp}\ \}(x_0, y_{02} : s_{02})
\end{array}
$$

in Verbindung mit

$$\{\ \mathsf{sf}\ \}(x_0, y_0 : S_0)\ \textit{und}\ \{\ \mathsf{sf}\ \}(X_0, s_{01} : s_{02})$$

erreicht $dist(s_{01}^\theta, s_{02}^\theta) = 3\, dist(x_0^\theta, y_0^\theta)$



Die Komponente H hat die Funktion, die Streckenlänge $x_0\,y_0$ zu verdreifachen.

Abbildung 7.7: Skizze zur Multiplikatorfunktion von H

Beweis:
Die einzige Interpretation, die all dies realisiert, ist diejenige, bei der die drei

Rechtecke Quadrate sind, da sie jeweils die Seite des einen die Diagonale eines anderen ist und sich also ihre Diagonalen jeweils rechtwinklig schneiden müssen. Also ist in jeder Realisierung θ

$$\begin{array}{rrcccc}
 & dist(x_0^\theta, y_0^\theta) & = & dist(y_0^\theta, s_{01}^\theta) & = & dist(y_0^\theta, y_{01}^\theta) \\
 & dist(y_0^\theta, y_{01}^\theta) & = & dist(x_{01}^\theta, y_{01}\ intp) & = & dist(y_{02}^\theta, s_{01}^\theta) \\
\Rightarrow & dist(y_0^\theta, y_{02}^\theta) & = & 2\, dist(x_0^\theta, y_0^\theta) & & \\
\text{und} & dist(y_0^\theta, s_{02}^\theta) & = & 4\, dist(x_0^\theta, y_0^\theta) & &
\end{array}$$

(Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck $\Delta x_0^\theta, s_{02}^\theta, y_{02}^\theta$), woraus sich

$$dist(s_{01}^\theta, s_{02}^\theta) \quad = \quad 3\, dist(x_0^\theta, y_0^\theta)$$

ergibt.
$\overrightarrow{x_0^\theta x_{01}^\theta}$ legt dabei die Richtung "oben" fest, $\overrightarrow{x_0^\theta y_0^\theta}$) die Richtung "rechts" senkrecht dazu.

$\Box$(Multiplikatorfunktion (Lemma 157))

Beispielsweise ist nun $\{\ rp\ \}(G - \{x_0\}, x_0 : X_h)$ konstruiert.

2. Die Variablen-Komponenten :

Für jede Variable x_i ($i \leq n$) wird in $C_{\mathcal{F}}$ das oben angeführte rechtwinkligen Dreieck V_i eingeführt. Die Grundidee ist, die den Variablen entsprechenden Modellkomponenten so zu integrieren, daß sie alle mit ihrer Hypothenuse auf der Linie senkrecht durch den Punkt x_0^θ liegen. Dies wird durch die Constraints $\{\ ll\ \}(x_0, y_0 : X)$ erreicht, wobei (vgl. Abbildung 7.2)

$$X \bigcup_{i=}^{n} X_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_{i1}, x_{i2}, \bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}\}$$

genau aus den Elementen besteht, die auf einer Hypothenuse liegen. Zudem erreichen die Constraints $\{\ ll\ \}(x_0, y_0 : Y)$, daß die entsprechenden gegenüberliegenden Ecken alle auf der Senkrechten durch den Punkt y_0^θ liegen, wobei $Y = \{y_i\}$ genau aus den Elementen besteht, bei deren Realisierungen der rechte Winkel eines Variablen-Komponenten-Dreiecks liegt.
Die Constraints zwischen verschiedenen Einzelkomponenten V_i werden in meiner Konstruktion so konstruiert, daß die VariablenKomponenten in Realisierungen entlang der Senkrechte durch x_0^θ mit steigendem Variablenindex zunehmend weiter von x_0^θ entfernt liegen, und darüberhinaus so, daß sie beliebig weit entfernt von den zuvor konstruierten ModellKomponenten liegen können.

Sei daher

$$\begin{aligned} x_0 =_o y_0 \prec_o h =_o x_{01} =_o y_{01} \prec_o x_{02} =_o y_{02} \\ \prec_o x_{11} \prec_o \ldots \prec_o \bar{x}_{(i-1),2} \prec_o x_{i1} \prec_o x_{i2} =_o y_i =_o \bar{x}_{i1} \prec_o \bar{x}_{i2} \\ \prec_o x_{(i+1),1} \prec_o \ldots \prec_o \bar{x}_{n2} \end{aligned} \tag{7.1}$$

und

$$h \prec_r X \prec_r Y,\ \ x_1 =_r x_2\ \ (x_i \in X^+)\ \ \text{ und } y_1 =_r y_2 (y_i \in Y^+)$$

Die Constraints mit einem weiteren Nichttransferelemente n werden so konstruiert, daß sie im offenen Keil der bisher konstruierten Elemente liegen. Also

$$\mathit{open\ wedge}\ (\prec_o, \prec_r, V : L \cup C \cup S \cup T).$$

Damit (und aus den später definierten open-wedge-Beziehungen und der Intention, daß $\prec_o, \prec_r$ die Ordnung der Punkte nach oben/rechts widerspiegeln) ergibt sich innerhalb der funktionalen Einheit N für $(e_1, e_2 : e_3)$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_1 \preceq_r e_2 \preceq_r e_3$) der jeweils in Tabelle 7.1 angegebene Constraint. Ausnahmen von diesen Constraints werden explizit angegeben.

Constraints in N				
falls	$e_1 =_r e_2 =_r e_3$	$e_1 =_r e_2 \prec_r e_3$	$e_1 \prec_r e_2 =_r e_3$	$e_1 \prec_r e_2 \prec_r e_3$
$e_1 \prec_o e_2$:				
$e_1 \prec_o e_2 \prec_o e_3$	$\{\ \mathit{sf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [8]
$e_1 \prec_o e_2 =_o e_3$	$\{\ e_{23}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rp}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ e_{23}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$
$e_1 \prec_o e_3 \prec_o e_2$	$\{\ \mathit{sc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{irc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [9]	$\{\ \mathit{irc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{irc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$
$e_1 =_o e_3 \prec_o e_2$	$\{\ e_{13}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rp}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{orc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{erc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [10]
$e_3 \prec_o e_1 \prec_o e_2$	$\{\ \mathit{sb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [11]	$\{\ \mathit{rb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$
$e_1 =_o e_2$:				
$e_1 =_o e_2 \prec_o e_3$	$\{\ e_{12}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ e_{12}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lp}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$
$e_1 =_o e_2 =_o e_3$	$\{\ \mathit{eq}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ e_{12}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ e_{23}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{sf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$
$e_3 \prec_o e_1 =_o e_2$	$\{\ e_{12}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ e_{12}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rp}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$
$e_2 \prec_o e_1$:				
$e_2 \prec_o e_1 \prec_o e_3$	$\{\ \mathit{sb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [12]	$\{\ \mathit{lb}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [13]
$e_2 \prec_o e_1 =_o e_3$	$\{\ e_{13}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{ll}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{olc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{elc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [14]
$e_2 \prec_o e_3 \prec_o e_1$	$\{\ \mathit{sc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{ilc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [15]	$\{\ \mathit{ilc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{ilc}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [16]
$e_2 =_o e_3 \prec_o e_1$	$\{\ e_{23}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lp}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ e_{23}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [17]
$e_3 \prec_o e_2 \prec_o e_1$	$\{\ \mathit{sf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{rf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$	$\{\ \mathit{lf}\ \}(e_1,e_2:e_3)$ [18]

Tabelle 7.1: Die basierend auf den Ordnungen definierten Standard-Constraints

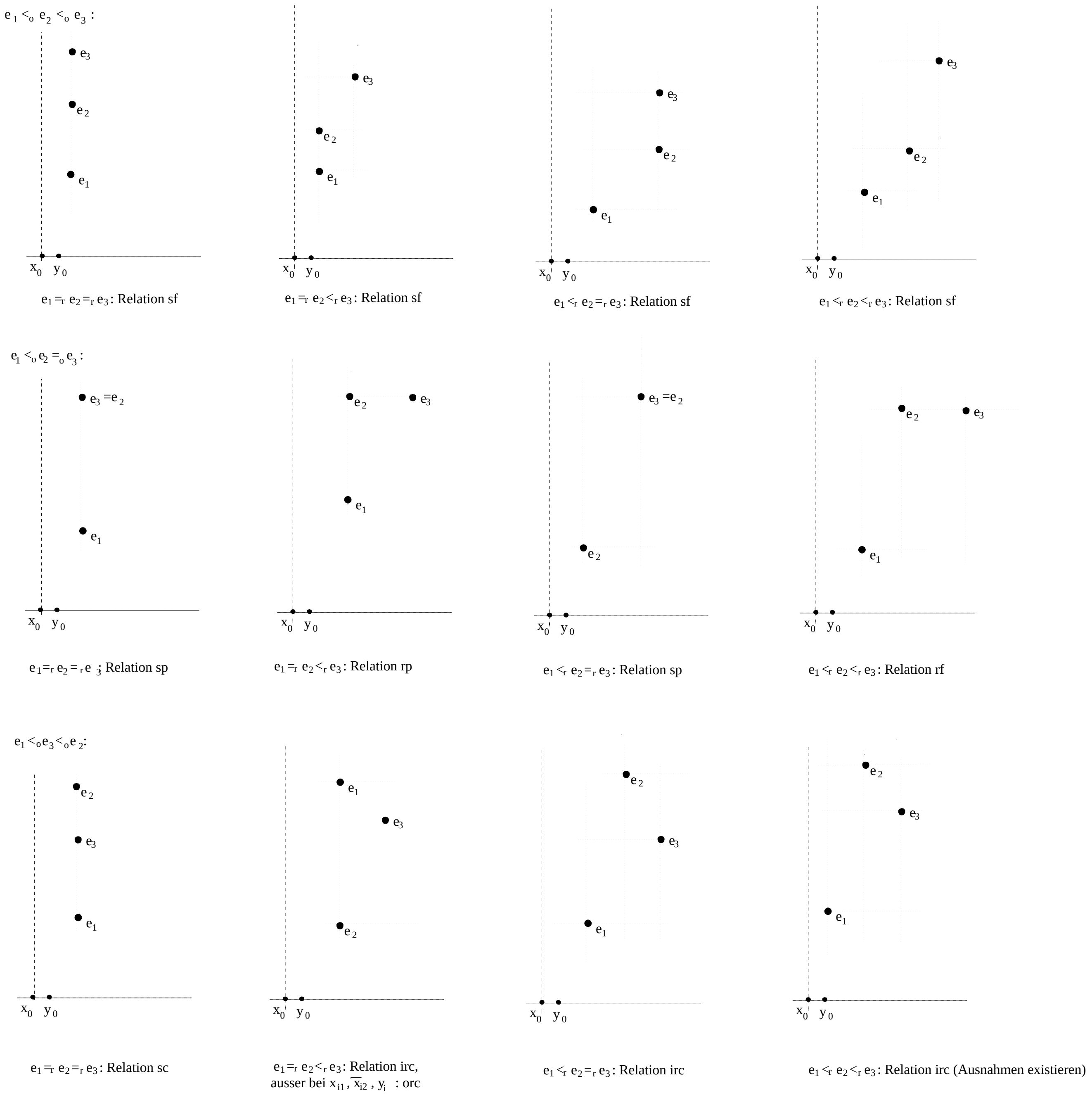


Abbildung 7.8: Die ersten Constraints aus Tabelle 7.1, schematisch

[18]

3. Die Literale-Komponenten :

Für jedes Literalvorkommen l_{jk} ($j \leq m, k \leq 3$) wird in $C_{\mathcal{F}}$ eine Komponente L_{jk}, bestehend aus 2 Elementen l_{jk1} und l_{jk2} konstruiert, deren Interpretation als Strecke genau den gleichen Wahrheitswert erhalten soll, wie die in $\mathcal{F}$ entsprechende Variable x_i bzw. $\bar{x}_i$. Um diese Übertragung zu gewährleisten, wird für jedes Literalvorkommen noch eine Transferkomponente mit den 2 Elementen $\bar{l}_{jk1}$ und $\bar{l}_{jk2}$ eingeführt. Die für diese Elemente konstruierten Constraints $\mathit{Transfer}\ (x_{i1}, x_{i2} : l_{jk1}, l_{jk2}, \bar{l}_{jk1}, \bar{l}_{jk2})$ (bzw. $\mathit{Transfer}\ (\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2} : l_{jk1}, l_{jk2}, \bar{l}_{jk1}, \bar{l}_{jk2})$) erreichen für Realisationen θ von $C_{\mathcal{F}}$ die Parallelität $\ell(x^{\theta}_{i1}, {l_{jk1}}^{\theta}) || \ell(x^{\theta}_{i2}, l_{jk2}\theta)$, und damit die Streckengleichheit
$dist(l^{\theta}_{jk1}, l^{\theta}_{jk2}) = \ dist(x^{\theta}_{i1}, x^{\theta}_{i2})$ (bzw. $= \ dist({\bar{x}_{i1}}^{\theta}, {\bar{x}_{i2}}^{\theta})$).
$x^{\theta}_{il} l^{\theta}_{jkl} (l \in \{1, 2\})$ heißt dabei die Transfergerade von $\bar{l}^{\theta}_{jkl}$.

Man beachte, daß die Reihenfolge der l_{jkl} durch $\mathcal{F}$ festgelegt ist. Diese Reihenfolge wird auf $C_{\mathcal{F}}$ übertragen, indem in der Konstruktion gilt, daß $l_{j_1 k_1 l_1} \prec_o l_{j_2 k_2 l_2}$, genau dann, wenn $j_1 k_1 l_1$ in dieser Reihenfolge, einfach gesagt lexikografisch, vor $j_2 k_2 l_2$ kommt, und darüberhinaus immer $l_{j_1 k_1 l_1} =_r l_{j_2 k_2 l_2}$ gilt. Aus Tabelle Tabelle 7.1 ergibt sich für alle Elemente l_{jkl} $(j \leq m,\ k \leq 3,\ l \leq 2)$ in $C_{\mathcal{F}}$ der Constraint $\{\ \mathit{lp}\ \}(V_0, l_0 : l_{jkl})$, der erreicht, daß l^{θ}_{jkl} auf der Senkrechten durch l^{θ}_0 liegt.

[8]Beispielsweise $\{\ \mathit{lf}\ \}(V, L \cup C : S)$. Einzige Ausnahmen sind $\{\ \mathit{sf}\ \}(s_{j1}, s_{j3} : s_{j5})$, $\{\ \mathit{rf}\ \}(\{s_{j1}, s_{j4}\}, s_{k3} : s_{k5})$. (j¡k)

[9]nur dann nicht, wenn e_1, e_2 in der gleichen Komponenten V_i liegen, denn dann gelte weiterhin $\{\ \mathit{orc}\ \}(x_{i1}, \bar{x}_{i2} : y_i)$. Sonst immer, sogar für $e_1 = s_{j1}, e_2 = s_{j4}$ in der gleichen Komponente $S_{(j)}$, gilt aber $\{\ \mathit{irc}\ \}(s_{j1}, s_{j4} : s_{j3})$.

[10]außer die bereits konstruierten Fälle $\{\ ,\ \}(h, x_{02} : y_{01} \mathit{rp})$ $\{\ \mathit{rp}\ \}(x_0, y_{02} : s_{02})$, $\{\ \mathit{rf}\ \}(x_0, y_{01} : \{l_{01}, c_{01}\})$.

[11]kommt nur vor, wenn e_3, e_2 in verschiedenen Komponenten $V_{i3}, V_{i2}, i3 < i2$ oder, wenn $e_3 \in G$. Einzige Ausnahme ist der bereits konstruierte Constraint $\{\ \mathit{rl}\ \}(x_{01}, y_{02} : y_0)$.

[12]Beispielsweise, wenn e_2, e_3 in verschiedenen Komponenten $V_{i2}, V_{i3}, i2 < i3$ liegen; einzige Ausnahme von $\{\ \mathit{lb}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$ ist der bereits konstruierte Constraint $\{\ \mathit{ll}\ \}(x_{01}, y_0 : y_{02})$

[13]Beispielsweise $\{\ \mathit{lb}\ \}(V, l_0 : C \cup S)$. Einzige Ausnahme ist das bereits konstruierte $\{\ \mathit{elc}\ \}(h, x_0 : y_0 2)$.

[14]Beispielsweise $\{\ \mathit{elc}\ \}(s_{j4}, s_{j5} : s_{j3})$. Einzige Ausnahme ist $\{\ \mathit{lp}\ \}(h, x_0 : y_{01})$ (bereits konstruiert).

[15]Falls e_2, e_1 in der gleichen Komponente $V_i liegen$, gelte weiterhin $\{\ \mathit{olc}\ \}(\bar{x}_{i2}, x_{i1} : y_i)$

[16]Einziges Vorkommen ist $\{\ \mathit{ilc}\ \}(s_{j1}, s_{k3} : s_{l5})$ oder $\{\ \mathit{ilc}\ \}(s_{j4}, s_{k3} : s_{l5})$, $j > l \geq k$.

[17]einzige Vorkommen sind Tripel mit $e_1 \prec_r e_2 \prec_r e_3$; $e_2, e_3 \in G$, z. B. $\{\ \mathit{lf}\ \}(h, x_0 : y_0)$, $\{\ \mathit{lf}\ \}(x_{ij}, l_0 : s_{01})$.

[18]Beispielsweise $\{\ \mathit{lf}\ \}(\{s_{k1}, s_{k4}\}, s_{j3} : s_{j2})$ oder $\{\ \mathit{lf}\ \}(\tilde{x}_{kl}, y_j : G - V)$, $k > j$. Einzige Ausnahmen sind $\{\ \mathit{rf}\ \}(\bar{x}_{k2}, y_k : G - V_0)$, $\{\ \mathit{sf}\ \}(s_{j4}, s_{j3} : s_{j2})$ und $\{\ \mathit{rf}\ \}(s_{k4}, s_{k3} : \{s_{j2}, s_{j5}\})$, $k > j$

Die Constraints mit einem weiteren Nichttransferelemente n werden wieder so konstruiert, daß sie im offenen Keil der bisher konstruierten Elemente liegen.

$$\mathit{open\ wedge}\ (\prec_o, \prec_r, V \cup L : C \cup S \cup T_C \cup T_S).$$

Damit sind nur noch die Constraints mit mindestens zwei Elementen innerhalb der Menge $C^+ \cup S^+$ nicht konstruiert.

4. Die Klausel-Komponenten :

Für jede Klausel $\{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}\}$ in $\mathcal{F}$ wird je eine Komponente C_j eingeführt. In jeder Klauselkomponente werden die drei Streckenlängen einer Klausel (die ja den Wahrheitswerten der Literale entsprechen) zu einer Gesamtstreckenlänge summiert.
Jede Klauselkompontente besteht aus vier Elementen $c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}$, für die alle der Constraint $\{\ \mathit{lp}\ \}(V_0, c_0 : C_j)$ konstruiert wird, d. h. die Elemente liegen in allen Interpretationen von $C_{\mathcal{F}}$ auf der Senkrechten durch c_0^θ. Wie bei den Literale-Komponenten sind diese Elemente c_{jk} lexikografisch entlang dieser Senkrechten mit ausreichend Abstand untereinander angeordnet (vgl. Abbildung 7.9a.), d. h. $c_{j_1k_1l_1} \prec_o c_{j_2k_2l_2}$, genau dann, wenn $j_1k_1l_1$ lexikografisch vor $j_2k_2l_2$ kommt, und darüberhinaus immer $c_{j_1k_1l_1} =_r c_{j_2k_2l_2}$ gilt.

Das bedeutet, innerhalb von C^+ werden die Constraints $\{\ \mathit{sf}\ \}(c_0, c_{j_1l_1} : c_{j_2l_2})$, $\{\ \mathit{sf}\ \}(c_{j_1l_1}, c_{j_2l_2} : c_{j_3l_3})$ konstruiert, falls j_1l_1 lexikografisch vor j_2l_2 lexikografisch vor j_3l_3.

Dabei wird durch weiterhin in $C_{\mathcal{F}}$ eingeführte Transfer-Komponenten erreicht, daß die Streckenlängen von den Literale-Komponenten auf die Klausel-Komponenten übertragen wird. Diese bestehen je Literal l_{jk} aus zwei Elementen $\bar{c}_{jk1}$ und $\bar{c}_{jk2}$. Analog zu $\bar{l}_{jk1}$ und $\bar{l}_{jk2}$ bei der Übertragung von den Variablen-Komponenten auf die Literale-Komponenten, wird durch die dazu konstruierten Constraints

$$\mathit{Transfer}\ (l_{jk1}, l_{jk2} : c_{jk}, c_{j(k+1)}, \bar{c}_{jk1}, \bar{c}_{jk2})$$

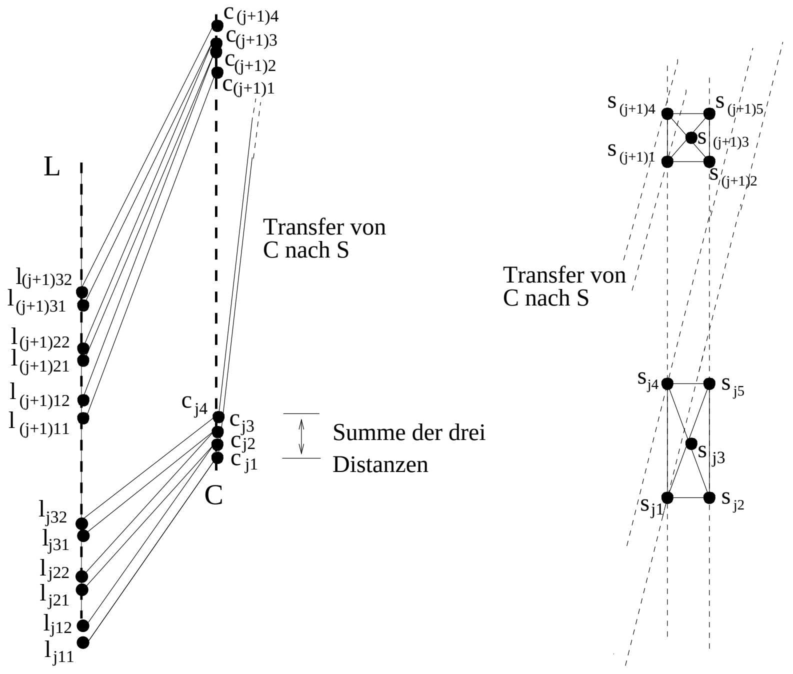
in jeder Realisation θ erreicht, daß $C_{\mathcal{F}}$ die Parallelität $\ell(l^\theta_{jk1}, {c_{jk1}}^\theta) || \ell(l^\theta_{jk2}, {c_{jk2}}^\theta)$ gilt, und damit die Streckengleichheit

$$dist(l^\theta_{jk1}, l^\theta_{jk2}) = \ dist(c^\theta_{jk}, c^\theta_{j(k+1)}).$$

$l^\theta_{jkl} c^\theta_{jkl} (l \in \{1, 2\}$ heißt dabei entsprechend die Transfergerade von $\bar{c}^\theta_{jkl}$.

Man stelle sich wieder vor, daß die Steigung jeder Transfergeraden größer ist als alle Steigungen vorher. Dies wird erreicht durch

$$\mathit{open\ wedge}\ (\prec_o, \prec_r, V \cup L : C).$$



a. Transfer von L nach C (schematisch)

b. Instanzierung der Erfüllbarkeitskomponenten

Abbildung 7.9: a. Die Addition der Streckenlängen in den Komponenten L, C b. Die jeweils nächste Erfüllbarkeits-Einzelkomponente S_{j+1} soll ganz oberhalb der Transfergeraden der vorigen liegen.

Für die nachfolgenden Elemente konstruiere ich wieder

$$\mathit{open\ wedge}\ (\prec_o, \prec_r, V \cup L \cup C : S \cup T_S).$$

5. Die Erfüllbarkeitstest-Komponenten :

Damit $C_{\mathcal{F}}$ erfüllbar ist, genau dann, wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist, muß es in $C_{\mathcal{F}}$ Komponenten geben, die je nach Variablenbelegung, d. h. je nach Interpretation der Elemente x_{ij}, erfüllbar sind oder nicht. $\mathcal{F}$ ist erfüllbar, wenn jede Klausel erfüllbar ist, und analog werden in $C_{\mathcal{F}}$ Erfüllbarkeitstest-Komponenten $S_{(j)}$ $(j \leq m)$ eingeführt, für jede Klausel eine.
Jede Erfüllbarkeitskomponente $S_{(j)}$ bestehe aus 5 Elementen $s_{j1}, s_{j4}, s_{j3}, s_{j2}, s_{j5}$. Dazu werden die Constraints

$$\mathit{Rectangle}\ (s_{i4}, s_{i5} : s_{j1}, s_{j2})\ \ (0 \leq i < j),$$
$$\mathit{Rectangle}\ (s_{j1}, s_{j2} : s_{j4}, s_{j5}), \{\ \mathit{sc}\ \}(s_{j1}, s_{j5} : s_{j3}) \quad \text{und } \{\ \mathit{sc}\ \}(s_{j4}, s_{j2} : s_{j3})$$

konstruiert, die sicherstellen, daß in jeder Realisation θ jeweils die Punkte s^{θ}_{j3} Diagonalenschnittpunkte des aus den übrigen vier Punkten gebildeten Rechtecks sind, und alle diese Rechtecke sich zwischen den Senkrechten in s^{θ}_{01} und der in s^{θ}_{02} befinden (vgl. Abbildung **??**, Abbildung 7.3).
Für spätere Betrachtungen ist es zweckmäßig, Bezeichnungen einzuführen für die Teilmengen

$$S_1 := \{s_{j1}, s_{j4} \mid j \leq m\},\ \ S_3 := \{s_{j3} \mid j \leq m\},\ \ S_2 := \{s_{j2}, s_{j5} \mid j \leq m\}$$

Jede dieser Teilmengen bildet eine Senkrechte.

Zusätzlich wird eine Transfer-Komponente $T_{S_{(j)}}$ mit zusätzlichen Transferelementen $\bar{s}_{j1}, \bar{s}_{j4}$ je Komponente eingeführt und die Constraints

$$\mathit{Transfer}\ (c_{j1}, c_{j4} : s_{j1}, s_{j4}, \bar{s}_{j1}, \bar{s}_{j4})$$

konstruiert. Dadurch werden von den Klausel-Komponenten die Gesamtstreckenlängen einer Klausel übertragen (die ja den Summen der Wahrheitswerte der Literale entsprechen), sodaß in einer Realisation θ die Strecke $dist(s^{\theta}_{j1}, s^{\theta}_{j4})$ (und damit auch $dist(s^{\theta}_{j2}, s^{\theta}_{j5})$) der Summe der Wahrheitswerte entspricht.
$c^{\theta}_{j,l^2} s^{\theta}_{jl} (l \in \{1,2\})$ heißt dabei die Transfergerade von $\bar{s}^{\theta}_{jl}$.
Beachte, daß von $\mathit{open\ wedge}\ (\prec_o, \prec_r, V \cup L \cup C : S)$ erreicht wird, daß die neuen Transfergeraden in $S \cup T_S$ steiler als alle vorhergehenden sind, und $\{\ \mathit{lf}\ \}(C, s_{j4} : s_{(j+1),2})$ (vgl. Tabelle 7.1 erreicht, daß spätere Erfüllbarkeits-Einzelkomponenten oberhalb der Transfergeraden aller früheren liegen (vgl. Abbildung 7.9b.).

Wie in der Einleitung des Beweises erklärt, ist nun eine erfüllbare Interpretation der Constraints nur dann möglich, wenn die Gesamtstreckenlänge $dist(s^{\theta}_{j1}, s^{\theta}_{j4})$

jeweils größer ist als die Streckenlänge $dist(s^\theta_{j1}, s^\theta_{j2})$, was bei der angegebenen Interpretation genau dann der Fall ist, wenn in jeder Klausel mindestens ein Literal *wahr* ist.

xxx: Ausnahmen ausdrücklich.

6. Die Transfer-Komponenten :

Durch die in Tabelle 7.1 konstruierten Constraints sind alle Constraints zwischen Elementen von $N := G \cup H \cup V \cup C \cup S$ konstruiert. Bislang sind also nur noch die Constraints, in denen die Transferelemente vorkommen, unkonstruiert, bis auf die Constraints mit den Elementen, deretwegen sie eingeführt wurden, die durch die Konstruktion Transfer bestimmt sind.
Diese Constraints mit den übrigen Elementen werden nun so eingeführt werden, daß die Transferelemente extrem weit rechts oben konsistent initialisiert werden können. Deshalb konstruiere ich $N \prec_r T$, $N \prec_o T$ (vgl. Abbildung 7.10).

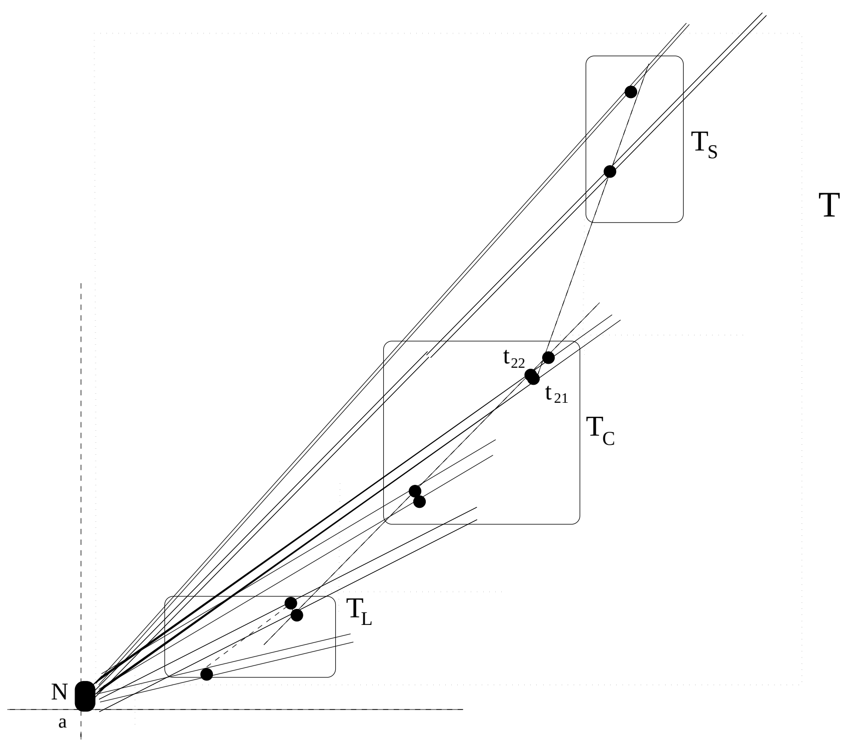


Abbildung 7.10: Grobes Schema zur Anordnung der Transferelemente in Bezug zu den Nichttransferelementen

Für die Konstruktion der Constraints zwischen verschiedenen Transferelementen benötige ich die Ordnung $\preceq_t$ auf T. Sie wird basierend auf der Anordnung

der Literale in $\mathcal{F}$ bestimmt werden mit der Intention, daß bei den zunehmend nachgeordneten Transferelementen die zugehörigen Transfergeraden zunehmend steilere Steigungen aufweisen werden.
Dabei wird festgelegt: $T_L \prec_t T_C \prec_t T_S$. Innerhalb von T_L und T_S seien die Elemente jeweils lexikografisch geordnet, wobei aber $\bar{l}_{jk1} =_t \bar{l}_{jk2}$ und $\bar{s}_{j1} =_t \bar{s}_{j4}$ für alle j, k festgelegt sei, und innerhalb von T_C wird festgelegt:

$$\begin{aligned}&\bar{c}_{(j-1)11} =_t \bar{c}_{(j-1)12} \prec_t \\ &\quad \bar{c}_{j31} =_t \bar{c}_{j32} \prec_t \bar{c}_{j21} =_t \bar{c}_{j22} \prec_t \bar{c}_{j11} =_t \bar{c}_{j12} \prec_t \bar{c}_{(j+1)31} =_t \bar{c}_{(j+1)32} \text{ für jedes } j.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Zusammengehörige Transferelemente stehen also in der Ordnung an gleicher Position.
Diese Ordnung geht in die Konstruktion von $C_\mathcal{F}$ ein, indem die Constraints zwischen den Transferelemententen $\bar{l}_{jkl} \in T$ so konstruiert werden, daß die Transferelemente in aufsteigender Reihenfolge zunehmend weiter weg vom Grundgerüst liegen müssen, und zwar in einem weiten aufsteigenden Linksbogen, ähnlich einer Parabel (vgl. Abbildung 7.10). Basierend auf dieser Ordnung konstruiere in $C_\mathcal{F}$ also nun die Ordnungen $\prec_o$ und $\prec_r$ auf T: Es gelte

$$t_1 \prec_o t_2 :\Longleftrightarrow\ t_1 \prec_t t_2 \vee t_1 =_t t_2, \text{ sonst } t_2 \prec_o t_1.$$
$$\text{Außerdem gelte } t_1 \prec_r t_2 :\Longleftrightarrow\ t_1 \prec_t t_2, \text{ sonst } t_2 \prec_r t_1.$$

Alle Paare (t_1, t_2) mit $t_1 \prec_t t_2$ sind also aufsteigend und alle Paare (t_{jk2}, t_{jk1}) sind also absteigend.[19]

Die Constraints zwischen Transferelementen (T,T:T):

Die Idee ist nun, daß basierend auf dieser Ordnung Constraints zwischen den Transferelementen konstruiert werden, die die bei jeder Variablenbelegung β miteinander verträglich interpretierbar sind. Entscheidend ist dabei, daß diese

[19] Insgesamt ist nun für jede zwei-elementige Teilmenge der Elemente von $C_\mathcal{F}$ ein Paar als aufsteigend oder absteigend festgelegt. Dabei gilt:
bezeichnungslos sind die Paare mit $e_2 \prec_r e_1$ oder $e_2 \prec_o e_1$ und $e_1 =_r e_2$.
absteigend sind genau die folgenden:
1. Die Ausgangselemente e_1, e_2 liegen beide in der gleichen *Senkrechten*, also beide in $X \cup X_h \cup \{x_0\}$, beide in $Y \cup Y_h \cup \{y_0\}$, beide in $L \cup \{l_0\}$, beide in $C \cup \{c_0\}$, beide in $S_1 \cup \{s_{01}\}$, beide in S_3 oder beide in $S_2 \cup \{s_{02}\}$.
2. $e_2 \in G$ und $e_1 \notin G$, aber $e_1 \prec_o e_2$.
3. $e_2 = y_i$ und $e_1 = x_{jl}$ oder $\bar{x}_{jl}$ für $j > i \geq 0$ oder $e_1 = \bar{x}_{i2}$. 4. $e_2 = s_{j3}$ und $e_1 = s_{k2}$ oder s_{k1} für $k > j$ oder $e_2 = s_{j4}$. 5. $e_2 = s_{j2}$ oder $e_2 = s_{j5}$ und $e_1 = s_{k1}$ oder s_{k2} oder s_{k3} für $k > j$.
6. $e_2 = s_{j2}$ und $e_1 = s_{j4}$ oder $e_1 = s_{j3}$.
7. $e_2 = t_1$ und $e_1 = t_2$, wobei $t_1 =_t t_2$
Alle anderen Paare sind aufsteigend.

Ordnung nur von $\mathcal{F}$ abhängt, aber nicht von einer Belegung β.

Dies wird erreicht durch die Constraints $\mathtt{slope\ order}\,(\bar{l}_{11}, \bar{l}_{12} : \bar{l}_{21}, \bar{l}_{22}, \bar{l}_{31}, \bar{l}_{32})$, wobei $\bar{l}_{11} =_t \bar{l}_{12} \prec_t \bar{l}_{21} =_t \bar{l}_{22} \prec_t \bar{l}_{31} =_t \bar{l}_{32}$. Dadurch sind alle Constraints innerhalb beliebiger Elemente von T konstruiert (vgl. Abbildung 7.14).

Constraints zwischen einem Nichttransfer- und zwei Transferelementen (T,T:N):

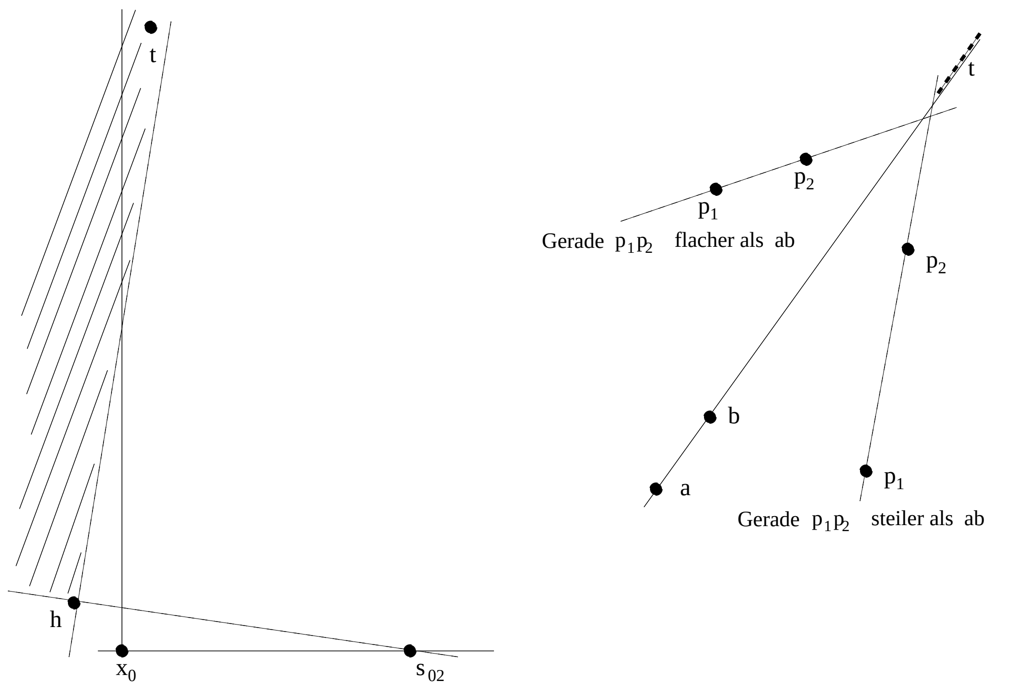
Da die Transferelemente durch beliebig weit entfernt liegende Punkte interpretiert werden können, und da die Relationen invariant unter zentrischer Streckung sind, kann man nun quasi aus der Interpretation herauszoomen, sodaß alle bisher konstruierten Punkte $G^\theta \cup V^\theta \cup L^\theta \cup C^\theta \cup S^\theta$ im Verhältnis zu T nahe beim Punkt (0;0) liegen. In $\mathfrak{RC}$ gilt: Die Constraints eines Elements t mit allen bisher konstruierten Punktepaaren legt seine Lage in Bezug auf alle von je zwei Punkten p_1^θ, p_2^θ konstruierten Geraden und in Bezug auf die Senkrechten dazu fest.
Beispielsweise der durch das flachste absteigende Paar festgelegte Constraint $\{\ \mathtt{lb}\ \}(h, s_{02} : T)$ erreicht dabei, daß in Realisationen θdie Punkte T^θ alle links der Geraden mit Steigung 6 durch h^θ und oberhalb der Geraden mit Steigung $\frac{1}{6}$ durch h^θ liegen (vgl. Abbildung 7.11a.).

Wenn nun ein Element wegen einem Constraint $\{\ \mathtt{sf}\ \}(a, b : t)$ auf einer Geraden mit Steigung s_{ab} liegt, so ist jede Interpretation t^θ von t, die weit genug rechts oben liegt, verträglich ist mit allen Constraints $\{\ \mathtt{lf}\ \}(p_1, p_2 : t)$, bei denen s_{ab} größer ist als die Steigung $s_{p_1p_2}$ der durch Punkte p_1^θ, p_2^θ bestimmten Geraden, und verträglich ist mit allen Constraints $\{\ \mathtt{rf}\ \}(p_1, p_2 : t)$, bei denen s_{ab} kleiner ist als die Steigung $s_{p_1p_2}$ der durch Punkte p_1^θ, p_2^θ bestimmten Geraden (vgl. Abbildung **??**b.).

Diese Eigenschaft nutze ich nun aus, um die Constraints für $(T, T : N)$ zu konstruieren.

Ich gebe nun an, welchen Constraint $C_\mathcal{F}$ für das Tripel $(e, t_1 : t_2)$ enthält.
Falls $t_1 \prec_t t_2$, gelte in $C_\mathcal{F}$ der Constraint $\{\ \mathtt{lf}\ \}(N, t_1 : t_2)$ (bzw. $\{\ \mathtt{lb}\ \}(t_1, t_2 : N)$.[20]
Falls $t_1 =_t t_2$ ist, so ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_1 \prec_r t_2,\ t_2 \prec_o t_1$. (Denn es genügt ja, den Constraint für ein Tripel über (e, t_1, t_2) anzugeben.) Da mein Ziel ist, eine Konstellation zu konstruieren, die bis auf die Erfüllbarkeitstestkomponenten erfüllbar ist, müssen diese Constraints wieder so festgelegt sein, daß sie verträglich mit der Reihenfolge der Elemente auf der Senkrechten sind. So, wie die Transferelemente eingeführt wurden, existieren je

[20]Diese Bedingung ist wesentlich dafür verantwortlich, daß die Realisierungen der Geraden, die Transferelemente T verbinden, zunehmend steiler werden.



a. Schraffiert ist der Bereich, in dem t so instanziert werden kann, dass lb (h, s_{02} : t) gilt.

b. Markiert ist der Bereich, in dem t so instanziert werden kann, dass sf (a, b: t) und rf/lf (p_1, p_2:t) gilt.

Abbildung 7.11: Die Geraden durch zwei Punkte und die Senkrechten dazu begrenzen die möglichen Instanzierungen für den dritten. Die Relation eines Tripels hängt mit den Steigungen der involvierten Geraden zusammen.

zwei zugehörige Nichttransferelemente $a_{t_i} \prec_r b_{t_i} \in N$ auf der zu t_1 bzw. auf der zu t_2 gehörigen Transfergeraden, sodaß $\{\ \mathit{lp}\ \}(a_{t_1}, t_1 : t_2)$, $\{\ \mathit{lp}\ \}(b_{t_1}, t_1 : t_2)$, $\{\ \mathit{rp}\ \}(a_{t_2}, t_2 : t_2)$ bzw. $\{\ \mathit{rp}\ \}(b_{t_2}, t_2 : t_2)$ gilt, etwa für $t_1 = \bar{s}_{j1}$ sind dies die Elemente s_{j1} und c_{j1}, und für $t_2 = \bar{s}_{j4}$ sind dies die Elemente s_{j4} und c_{j4}. Entsprechende Paare von zugehörigen Nichttransferelementen liegen in der gleichen Senkrechten übereinander, also $a_{t1} =_r a_{t_2},\ a_{t1} \prec_o a_{t_2}$ und $b_{t1} =_r b_{t_2},\ b_{t1} \prec_o b_{t_2}$. Dabei gibt es die drei Möglichkeiten:

$$\begin{array}{lll} t_1, t_2 \in T_L & a_{t_i} \in X & b_{t_i} \in L \\ t_1, t_2 \in T_C & a_{t_i} \in L & b_{t_i} \in C \\ t_1, t_2 \in T_S & a_{t_i} \in C & b_{t_i} \in S_1 \end{array}$$

Für Elemente e, die unterhalb beider Transfergeraden liegen, wird der Constraint $\{\ \mathit{lb}\ \}(e, t_1 : t_2) \in C_{\mathcal{F}}$ konstruiert, denn in jeder Realisierung wird die Steigung der Geraden $e^{\theta} t_1^{\theta}$ in jeder Realisation steiler sein als die Steigung der zu t_1 gehörigen Transfergerade, also wird der Winkel $\measuredangle t_2 t_1 e$ größer als ein rechter sein. Dem trägt nur der Constraint $\{\ \mathit{lb}\ \}(t_1, t_2 : e)$ Rechnung. Für Elemente e, die zwischen beiden Transfergeraden liegen, wird aus analogen Gründen der Constraint $\{\ \mathit{elc}\ \}(e, t_1 : t_2)$ konstruiert, und für Elemente e, die oberhalb beider Transfergeraden liegen, wird $\{\ \mathit{lf}\ \}(e, t_1 : t_2)$ konstruiert. Welcher Fall vorliegt, läßt sich wie folgt syntaktisch bestimmen:
Beispielsweise für ein Nichttransferelement e, das in der gleichen Senkrechten weiter unten als ein unteres dieser Elemente vorkommt, gilt syntaktisch $e =_r a_{t_1}$ und $e \prec_o a_{t_1}$ (oder $e =_r b_{t_1}$ und $e \prec_o b_{t_1}$). Analog für Elemente e, die auf der gleichen Senkrechten zwischen den beiden zugehörigen Nichttransferelementen oder oberhalb des oberen liegen. Es fehlt noch der Fall, daß $t_1 =_t t_2$ gilt, aber e nicht in einer der Senkrechten ist, in der die zugehörigen Nichttransferelemente a_{t_i}, b_{t_i} sind. In diesem Fall

für $t_1, t_2 \in T_L$	$e \in (G \cup Y \cup Y_h)$	gelte $\{\ \mathit{lb}\ \}(t_1, t_2 : e)$,	sonst $\{\ \mathit{lf}\ \}(t_1, t_2 : e)$[21]
für $t_1, t_2 \in T_C$	$e \in S_0 = \{s_{01}, s_{02}\}$	gelte $\{\ \mathit{lb}\ \}(t_1, t_2 : e)$,	sonst $\{\ \mathit{lf}\ \}(t_1, t_2 : e)$
für $t_1, t_2 \in T_S$	$e \in S_0 \cup \{s_{jl} \in S \mid s_{jl} \preceq_o b_{t_2}$[22]$\}$	gelte $\{\ \mathit{lb}\ \}(t_1, t_2 : e)$,	sonst $\{\ \mathit{lf}\ \}(t_1, t_2 : e)$

Diese Bestimmungen dessen, welche Elemente unterhalb welcher Transfergeraden liegen, sind gerade so gewählt, daß sie konsistent mit

$$\mathit{open\ wedge}\,(\prec_o, \prec_r, X \cup Y : L \cup C \cup S),$$
$$\mathit{open\ wedge}\,(\prec_o, \prec_r, X \cup Y \cup L : C \cup S) \text{ und}$$
$$\mathit{open\ wedge}\,(\prec_o, \prec_r, X \cup Y\ cupL \cup C : S).$$

Constraints zwischen einem Transfer- und zwei Nichttransferelementen (N,N:T):

Immer noch unkonstruiert sind die Constraints für $(e_1, e_2 : t)$, wobei $e_1, e_2 \in N,\ t \in T$. Wieder sollen die Constraints so festgelegt sein, daß sie verträglich

[21] Beachte, daß insbesondere $\{\ \mathit{lf}\ \}(t_1, t_2 : h)$. Schon flache Transfergeraden werden also sehr steil sein.

[22] Genau dann, wenn gilt $b_{t_2} = s_{k4},\ k \geq j$

mit der Reihenfolge der Elemente auf den Senkrechten sind. Für die Konstruktion der Constraints, die zuläßt, daß die Transferelemente durch beliebig weit von N entfernte Punkte instanziert werden können, ist die Reihenfolge der Steigungen zu berücksichtigen, wie man sieht, wenn man sich N auf einen Punkt zusammengeschrumpft vorstellt (vgl. Abbildung 7.10). Deshalb werden die neuen Constraints konsistent mit den Konstrukten in 1. bis 5. festlegen, ob die Steigung der Geraden $\ell(e_1^\theta, e_2^\theta)$ kleiner als die Steigung der zu t gehörigen Transfergeraden ist oder umgekehrt.

Wegen der Permutationsvollständigkeit betrachte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_1 \preceq_r e_2$

1. Fall: $e_1 =_o e_2$ und $e_1 =_r e_2$. (Dies gilt nur für die Elementepaare $(\bar{x}_{i1}, x_{i2})$). Für diese wird in $C_{\mathcal{F}}$ $\{ \; e_{12} \; \}(e_1, e_2 : T)$ konstruiert.

2. Fall: (e_1, e_2) absteigendes Paar.
Da alle Transferpunkte in den gedachten Realisierungen in jedem Fall weit rechts oben instanzierbar und alle Transfergeraden steil sein sollen (im Vergleich mit der Steigung der durch absteigende Paare bestimmten Geraden), wird für jedes absteigende Paar (e_1, e_2) $\{ \; lb \; \}(e_1, e_2 : T) \in C_{\mathcal{F}}$ konstruiert.

3. Fall: (e_1, e_2) aufsteigendes Paar.
Falls $e_2 \in G \cup V$ oder $e_1, e_2 \in S_i$ (beide in der gleichen Einzelkomponente), so wird in $C_{\mathcal{F}}$ $\{ \; lf \; \}(e_1, e_2 : T)$ konstruiert.

Auf allen anderen aufsteigenden Paaren führe ich eine neue Ordnung $\prec$ mit der Intention ein , daß es unabhängig von der Variablenbelegung β eine geeignete Interpretation θ gibt, sodaß die Steigung von $e_1^\theta e_2^\theta$ kleiner ist als die von $e_3^\theta e_4^\theta$, wenn $(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4)$. Dabei führe ich $(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4)$ ein genau dann, wenn $e_2 \neq e_4$ beide in der gleichen funktionales Menge liegen und $e_2 \prec_o e_4$ oder wenn $e_2 \neq e_4$ in verschiedenen Senkrechten liegen und $e_2 \prec_r e_4$ oder wenn $e_2 = e_4$ und $e_1 \prec_r e_3$ oder $e_3 \prec_o e_1$. [23]

[23]Dies ist tatsächlich eine Ordnung, denn je zwei verschiedene Paare sind vergleichbar, $(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4) \iff (e_3, e_4) \succ (e_1, e_2)$ und die Transitivität von $\prec$ und $\succ$ läßt sich durch Fallunterscheidungen beweisen. Etwa wenn $(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4) \wedge (e_3, e_4) \prec (e_5, e_6)$, weil $e_2 \neq e_4$ beide in der gleichen funktionales Menge liegen und $e_2 \prec_o e_4$ und $e_4 = e_6$ und $e_3 \prec_o e_5$, so gilt $(e_1, e_2) \prec (e_5, e_6)$, weil $e_2 \neq e_6$ beide in der gleichen funktionalen Menge liegen und $e_2 \prec_o e_6 = e_4$. Oder wenn $(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4) \wedge (e_3, e_4) \prec (e_5, e_6)$, weil $e_2 = e_4$ und $e_1 \prec_o e_3$, außerdem $e_4 = e_6$ und $e_3 \prec_o e_5$, so gilt $(e_1, e_2) \prec (e_5, e_6)$, weil $e_2 = e_6$ und $e_1 \prec_o e_5$, da $\prec_o$ transitiv ist. Die übrigen Fälle sind ähnlich einfach.

Diese Ordnung wird nun genutzt, um die Constraints für $(e_1, e_2 : t)$ zu konstruieren. Es gibt zu $t \in T$ als Transferelement ein zugehöriges Nichttransferelementepaar $a_t, b_t \in N$, sodaß $\{\ \mathfrak{sf}\ \}(a_t, b_t : t)$ in $C_{\mathcal{F}}$ konstruiert ist. Wenn $(e_1, e_2) \prec (a_t, b_t)$ dann konstruiere $\{\ \mathfrak{lf}\ \}(e_1, e_2 : t)$, sonst $\{\ \mathfrak{rf}\ \}(e_1, e_2 : t)$.

Damit sind alle Constraints konstruiert, denn die Constraints für $(N, N : N)$ wurden bereits in den Abschnitten 1. bis 5. konstruiert.

2. Teil: Die Erfüllbarbkeit von $C_{\mathcal{F}}$

Es bleibt zu zeigen, daß die so konstruierte Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist. Aus den bisher bewiesenen Lemmata folgt, daß $\mathcal{F}$ erfüllbar ist, wenn $C_{\mathcal{F}}$ erfüllbar ist. Denn wenn ${C_{\mathcal{F}}}^{\theta}$ alle Constraints erfüllt, dann sind insbesondere alle Transferrelationen erfüllt, und folglich übertragen sich Streckenlängen an gegenüberliegenden Parallelogrammseiten. Daher

$$
\begin{array}{rcc}
dist(s_{j2}^{\theta}, s_{j5}^{\theta}) & = & dist(s_{j1}^{\theta}, s_{j4}^{\theta}) \\
& = & dist(c_{j1}^{\theta}, c_{j4}^{\theta}) \\
& = & dist((l_{j1})_1^{\theta}, (l_{j1})_1^{\theta}) + dist((l_{j2})_1^{\theta}, (l_{j2})_2^{\theta}) + dist((l_{j3})_1^{\theta}, (l_{j3})_2^{\theta}) \\
& = & dist((z_{j1})_1^{\theta}, (z_{j1})_1^{\theta}) + dist((z_{j2})_1^{\theta}, (z_{j2})_2^{\theta}) + dist((z_{j3})_1^{\theta}, (z_{j3})_2^{\theta}),
\end{array}
$$

wobei $(z_{jk})_\iota$ für ein Element $x_{i\iota}$ oder $\bar{x}_{i\iota}$ steht.
Wegen der in 157 bewiesenen Multiplikatorfunktion von H gilt

$$
dist(s_{j1}^{\theta}, s_{j2}^{\theta}) \quad = \quad 3l
$$

Damit sind die Voraussetzungen für das Belegungslemma Lemma 149 erfüllt, sodaß daraus folgt, daß die Belegung

$$\beta \text{ mit } x^{\beta} := wahr \iff dist(x_{i1}^{\theta}, x_{i2}^{\theta}) > dist(x_0^{\theta}, y_0^{\theta})$$

eine erfüllende Belegung darstellt.

Daher bleibt nur die umgekehrte Richtung zu zeigen.

Lemma 158 (Erfüllbarkeit von $C_{\mathcal{F}}$) *Für jede die Formel $\mathcal{F} = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee_{m3})$ erfüllende Belegung β existiert eine Realisation $^{\theta}$ der zugehörigen Konstellation $C_{\mathcal{F}}$.*

Beweis:
Sei nun β eine erfüllende Belegung von $\mathcal{F}$. Als Beweis gebe ich im folgenden

eine Realisierung von $C_{\mathcal{F}}$ an. Dabei benutze ich folgende

Notationen:

Ich bezeichne für einen Punkt p den Wert seiner i-ten Koordinate mit $\kappa_i(p)$, also $p = (\kappa_1(p); \kappa_2(p))$. Für zwei Punkte p_1, p_2 bezeichne ich die Differenz der i-ten Koordinaten mit $\Delta_i(p_1, p_2) = \kappa_i(p_2) - \kappa_i(p_1)$ und mit $\sigma(p_1, p_2) = \frac{\Delta_2(p_1,p_2)}{\Delta_1(p_1,p_2)}$ die Steigung der durch diese Punkte definierten Geraden.
Seien wieder a_t, b_t die Nichttransferelemente mit $\{$ sʃ $\}(a_t, b_t : t)$, und σ_t bezeichne die Steigung $\sigma(a_t^\theta, b_t^\theta)$ der zugehörigen Transfergeraden.

Instantiation des Grundgerüsts:

Das Grundgerüst $G \cup H$ von $C_{\mathcal{F}}$ kann durch die Interpretationen

$$\begin{array}{lllll} x_0^\theta = (0;0), & y_0^\theta = (1;0), & & & \\ h_1^\theta = (0;1), & y_{01}^\theta = (1;1), & h^\theta = (-1;1), & x_{02}^\theta = (0;2), & y_{02}^\theta = (1;2), \\ l_0^\theta = (1.2;0), & c_0^\theta = (1.4;0), & s_{01}^\theta = (2;0), & s_{02}^\theta = (5;0) & \end{array}$$

realisiert werden. Man überzeugt sich leicht, daß die Constraints im Grundgerüst genau den Basisrelationen zwischen diesen Punkten entsprechen. In der Tat wurden die Constraints ja genau so gewählt.

Für die Interpretationen der übrigen Elemente nutze ich aus, daß die Constraints so konstruiert wurden, daß die Gültigkeit der Relationen unabhängig von den Wahrheitswerten wird, sofern ein von der Interpretation abhängiger Mindestabstand zwischen den verschiedenen Punkten eingehalten wird.

Bei dieser Interpretation, bei der dem Wahrheitswert *wahr* die Streckenlänge 3 entsprechen soll, und dem dem Wahrheitswert *falsch* die Streckenlänge $\frac{1}{3}$, ist dieser Mindestabstand innerhalb von X größer als 6 zu wählen. Man kann dann die Interpretation θ von $C_{\mathcal{F}}$ wie folgt festlegen:

$$\begin{array}{lllllll} x_{i1}^\theta & = & & (0 & ; & 3 \cdot 7^i - 3), & \text{falls } x_i^\beta = wahr; \\ x_{i1}^\theta & = & & (0 & ; & 3 \cdot 7^i - \frac{1}{3}), & \text{falls } x_i^\beta = falsch; \\ x_{i2}^\theta & = & \bar{x}_{i1}{}^\theta \; = & (0 & ; & 3 \cdot 7^i), & \\ y_i^\theta & = & & (1 & ; & 3 \cdot 7^i), & \\ \bar{x}_{i2}{}^\theta & = & & (0 & ; & 3 \cdot 7^i + 3), & \text{falls } x_i^\beta = falsch; \\ \bar{x}_{i2}{}^\theta & = & & (0 & ; & 3 \cdot 7^i + \frac{1}{3}), & \text{falls } x_i^\beta = wahr.^{24} \end{array}$$

Man überzeugt sich leicht, daß dann die entsprechenden Relationen in $G \cup V$ unabhängig von den Wahrheitswerten durch $(G \cup X \cup Y \cup H)^\theta$ realisiert

[23]Der Umstand, daß die Vorfaktoren exponentiell mit zunehmendem j, k steigen, ist nötig, damit die Ordnungskorrektheit für $\prec$ erfüllt sind. Dies ist jedoch kein Problem, da ich für die

werden: Innerhalb einer Einzelkomponente erfüllt θalle Constraints, wie man leicht nachrechnet. Beispielsweise $\{\ lp\ \}(x_{i1}, y_i : \bar{x}_{i2})$, denn
falls x_i^β =*wahr*, dann gilt $\sigma(x_{i1}^\theta, y_i^\theta) \cdot \sigma(\bar{x}_{i2}^\theta, y_i^\theta) = 3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1$,
falls x_i^β =*falsch*, dann gilt $\sigma(x_{i1}^\theta, y_i^\theta) \cdot \sigma(\bar{x}_{i2}^\theta, y_i^\theta) = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$.
Der Abstand zwischen Punkten aus verschiedenen Einzelkomponenten ist stets mindestens $\Delta_2(p_1, p_2) \geq 3{\cdot}7^2{-}3{-}(3{\cdot}7{+}3) = 120$, also ist Reihenfolge der Punkte in $(X^+)^\theta$ (ebenso in $(Y^+)^\theta$) unabhängig von β so, wie durch die Ordnung $\prec_o$ beschrieben, daraus folgen alle Relationen innerhalb der Senkrechten (vgl. Tabelle 7.1). Die für $g_0 \in G$, $i \leq k$ gelten die Constraints $\{\ lb\ \}(x_{il}^\theta, y_k^\theta : g_0^\theta)$, weil

$$\Delta 2(x_{il}^\theta, y_k^\theta) > \frac{1}{3} \Rightarrow \sigma(x_{il}^\theta, y_k^\theta) > \frac{1}{3},$$

aber

$$\Delta_2(x_{il}^\theta g_0^\theta) \geq 21 - 3 > 15,\ \ \Delta_1(x_{il}^\theta g_0^\theta) \leq 5 \Rightarrow \sigma(x_{il}^\theta, g_0^\theta) < -3,$$

daher $90^o < \measuredangle(g_0^\theta)(x_{il}^\theta)(y_k^\theta) < 180^o$. Stets gilt für $g \in G \cup \{h\}, y_i \in Y$:

$$3 < \frac{\kappa_2(y_i^\theta)}{4} < \ |\sigma(g^\theta, y_i^\theta)| \ \leq 5\kappa_2(y_i^\theta) = 15 \cdot 7^i,$$

denn $0.2 < \Delta_1(g^\theta, y_i^\theta) < 4$, bzw. für h ist $\Delta_1(y_i^\theta, h^\theta) = 2$ und $\Delta_2(y_i^\theta, h^\theta) > \frac{\kappa_2(y_i^\theta)}{2}$.
Für $v_{i_j} \in V_{i_j} (i_1 < i :_2)$:

$$|\sigma(v_{i_1}^\theta, \tilde{v}_{i_2}^\theta)| \ > (3 \cdot 7^{i_2} - 3) - (3 \cdot 7^{i_1} + 3) > 3 \cdot ((7^{i_2 - i_1} - 1)7^{i-1} - 2) > 15 \cdot 7^{i_1}$$

, denn $2 < 7^{i_1}$. Daher realisiert diese Instantiation die Constraints $\{\ rf\ \}(g, y_{i_1} : \tilde{x}_{i_2})$, $(i_1 < i_2)$, weil $\sigma(g^\theta, y_{i_1}) > \sigma(y_{i_1}, \tilde{x}_{i_2})$ und $\{\ lf\ \}(h, \tilde{x}_{i_2} : y_{i_1})$, weil $\sigma(h^\theta, \tilde{x}_{i_1}) < \sigma(\tilde{x}_{i_1}, y_{i_2})$ gilt.
Als weiteres Beispiel erkläre ich $\{\ lb\ \}(x_{(i_2),1}, y_{i_1} : y_{i_3})\,(i_1 < i_2 \leq 1_3)$, alle anderen lassen sich noch leichter nachvollziehen. Es ist bei jeder Belegung $\sigma(x_{(i_2),1}^\theta, y_{i_3}^\theta) \geq \frac{1}{3}$ und $\sigma(x_{(i_2),1}^\theta, y_{i_1}^\theta) < -3$, und daher $90^o < \measuredangle(y_{i_1}^\theta)(x_{(i_2),1}^\theta)(y_{i_3}^\theta) < 180^o$.
Der Vorfaktor 3 ist notwendig, damit die Relationen zwischen den Punkten der Komponente von x_1 und den Punkten der Basislinie, allen voran s_{02}^θ, nicht von den Wahrheitswerten abhängen.

Vorgehensweise:
Für die Interpretation der restlichen Elemtente in N nutze ich, daß die Elemente von X und Y bereits interpretiert sind. Sei in der auf $x_0^\theta = (0;0)$ und $y_0^\theta = (1;0)$ geeichten Interpretation θ von $C_\mathcal{F}$ der Wert $M_V :\geq \max_{v^\theta \in V^\theta} \kappa_2(v^\theta)$

polynomielle Reduktion nur benötige, daß dieKonstruktion der Constraints in polynomieller Zeit möglich ist, nicht jedoch das Finden einer Lösung.

mindestens der maximale Koordinatenwert in der Menge V^θ der Interpretationen der Variablen. Ich wähle

$$M_V = 3 \cdot 7^n + 3.$$

Die nachfolgenden Elemente instanziere ich schrittweise in jeder Hierarchiestufe (erst L, dann C, dann S) oberhalb der entsprechenden Grundlinienpunkte, und zwar so, daß sie bei jeder Belegung β oberhalb jeder Gerade liegen, die durch Paare von in dieser Hierarchie niedrigeren Punkten bestimmt wird. Dadurch erreiche ich, daß sie jeweils im offenen Keil der bereits instanzierten liegen. Innerhalb einer Hierarchiestufe instanziere ich die Punkte so, daß die Abstände zwischen den Einzelkomponenten größer sind als der größtmögliche Abstand der vorigen Hierarchiestufe. Dadurch erreiche ich, daß sie die Ordnungen auf den Elementen und Elementepaaren im intendierten Sinn erfüllen:

Definition 159 (ordnungskorrekt) *:*
Ich nenne eine Instantiation $\theta = \theta(\beta)$ ***ordnungskorrekt*** *für $\prec_r$, wenn für jedes β gilt*

$$e_1 \prec_r e_2 \iff \kappa_1(e_1^\theta) < \kappa_1(e_2^\theta) \qquad e_1 =_r e_2 \iff \kappa_1(e_1^\theta) = \kappa_1(e_2^\theta)$$

Sie heißt ***ordnungskorrekt*** *für $\prec_o$, wenn gilt*

$$e_1 \prec_o e_2 \iff \kappa_2(e_1^\theta) < \kappa_2(e_2^\theta) \qquad e_1 =_o e_2 \iff \kappa_2(e_1^\theta) = \kappa_2(e_2^\theta)$$

Sie heißt ***ordnungskorrekt*** *für $\prec_t$, wenn für alle Transferelemente t_1, t_2 gilt*

$$t_1 \prec_t t_2 \iff \sigma_{t_1} := \sigma(a_{t_1}^\theta, (b_{t_1})^\theta) < \sigma_{t_2} = \sigma(a_{t_2}^\theta, (b_{t_2})^\theta)$$

Sie heißt ***ordnungskorrekt*** *für $\prec$, wenn gilt*

$$(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4) \iff \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < \sigma(e_3^\theta, e_4^\theta),$$

falls e_2 und e_4 sowie e_3 und e_4 jeweils nicht in der gleichen Einzelkomponente $V_i, L_{jk}, C_j, S_{(j)}, T_{L_{jk}}, T_{C_j}$ oder $T_{S_{(j)}}$ stehen.
$\theta = \theta(\beta)$ heißt ***ordnungskorrekt*** *, falls θ ordnungskorrekt für $\prec_r, \prec_o, \prec_t$ und $\prec$ ist. Auch die einzelnen Instanzen der Relationen $\prec_o, \prec_r, \prec_t, \prec$, z. B. $e_1^\theta \prec_o e_2^\theta$ heißen jeweils (ordnungs-)korrekt.*

Beispiel 18 ($G^\theta \cup H^\theta \cup V^\theta$) *:*
Die bereits instanzierten Punkte $G^\theta \cup H^\theta \cup V^\theta$ sind ordnungskorrekt für $\prec_r$ und $\prec_o$ instanziert.

Beweis:
$\prec_r$ ist korrekt instanziert, wei $\forall x^\theta \in X^\theta : \kappa_1(x^\theta) = 0; \forall y^\theta \in Y^\theta : \kappa_1(y^\theta) = 1.$

Jede Einzelkomponente ist ordnungskorrekt für $\prec_o$ instanziert, weil für $x_i^\beta = wahr$, und ebenso für $x_i^\beta = falsch$

$$\kappa_2(x_{i1}) < \kappa_2(x_{i2}) = 3 \cdot 7^i = \kappa_2(\bar{x}_{i1}) < \kappa_2(\bar{x}_{i2})$$

Wie bereits gesehen, ist $G^\theta \cup H^\theta \cup V^\theta$ für Punkte aus verschiedenen Einzelkomponenten ordnungskorrekt für *po*.

$\Box$(Beispiel 18)

Diese Instantiation $\theta = \theta(\beta)$ läßt sich so für jedes β ordnungskorrekt von $V^\theta \cup G^\theta \cup H^\theta$ auf N erweitern, daß zudem für ein β, das $\mathcal{F}$ erfüllt, die Kriterien des folgenden Lemmas erfüllt sind. Danach zeige ich, daß sich solch eine Instantiation auch erfüllbar auf alle Nichttransferelemente erweitern läßt, womit die Erfüllbarkeit 160 bewiesen ist.

Lemma 160 (Erfüllbarkeitskriterium für N) *: Sei θ eine für $\prec_o, \prec_r$ und $\prec$ ordnungskorrekte Erweiterung von $V^\theta \cup G^\theta \cup H^\theta$ auf N, die alle Constraints innerhalb jeder Einzelkomponente $S_{(j)}$ realisiert. Gelte $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < -\frac{1}{9}$ für alle absteigenden Paare und falls e_1, e_2 in verschiedenen Einzelkomponenten liegen, gelte $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > 9$ für alle aufsteigenden Paare in θ. Dann realisiert θ alle Constraints zwischen Nichttansferelementen von $C_{\mathcal{F}}$.*[24]

Beweis:
Die Constraints innerhalb einer Einzelkomponente $S_{(j)}$ sind nach Voraussetzung erfüllt. Aus der Ordnungskorrektheit für $\prec_r, \prec_o$ ergibt sich, daß alle Constraints für Tripel $(e_1, e_2 : e_3)$ realisiert sind, für die unter der ohne Beschränkung der Allgemeinheit gemachten Annahme $e_1 \preceq_r e_2 \preceq_r e_3$ eine der folgenden Kriterien gilt (vgl. Tabelle 7.1).
$e_1 =_r e_2 =_r e_3$ $(\{\mathsf{eq}\}, \{\mathsf{e}_{12}\}, \{\mathsf{sf}\}, \{\mathsf{e}_{23}\}, \ldots$ oder $\{\mathsf{sb}\}$, je nach Anordnung bezüglich $\prec_o)$,
$e_1 =_o e_2$,
$e_2 =_o e_3$,
$e_1 =_o e_3 \prec_r e_3$ und nicht $e_1 \prec_r e_2 \prec_r e_3$,
$e_1 =_r e_2 \prec_r e_3$ und nicht $e_1 \prec_o e_3 \prec_o e_2$ oder $e_2 \prec_o e_3 \prec_o e_1$,
$e_1 =_r e_3 \prec_r e_3$ und nicht $e_1 \prec_o e_2 \prec_o e_3$ oder $e_3 \prec_o e_2 \prec_o e_1$,
$e_2 =_r e_3 \prec_r e_3$ und nicht $e_2 \prec_o e_1 \prec_o e_3$ oder $e_3 \prec_o e_1 \prec_o e_2$.
Denn genau in diesen Fällen liegen Punkte gemeinsam auf einer waagrechten oder senkrechten Linie und der gegebenenfalls dritte Punkt steht nicht in der

[24]Dies funktioniert, denn die Constraints wurden genau so definiert, daß sie auf diesen Ordnungen basieren.

$\mathfrak{DC}$-Relation $\{\mathfrak{lc}\}$ oder $\{\mathfrak{rc}\}$: Zu untersuchen bleiben also noch die in Abbildung 7.12 skizzierten Fälle
1. $e_1 \prec_r e_2 \prec_r e_3$ und $e_1 \neq_o e_2 \neq_o e_3$,
2. Zwei Punkte sind in der gleichen Senkrechten, und der dritte liegt zwischen den beiden waagrechten Linien, die Orthogonalen in den Punkten sind.

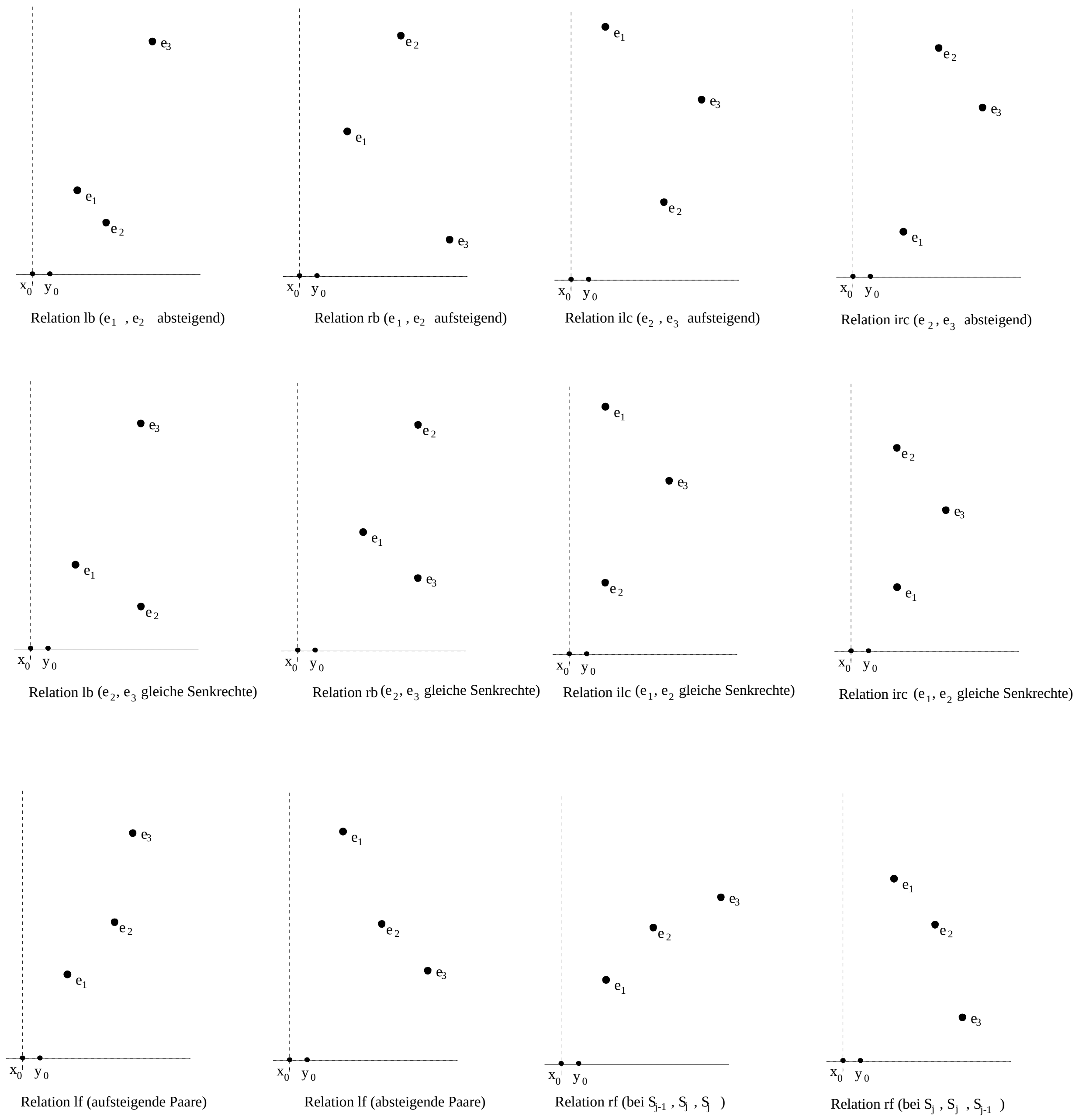


Abbildung 7.12: Die noch zu untersuchenden Fälle

Die Relationen $\{\mathit{lp}\}$, $\{\mathit{olc}\}$, $\{\mathit{elc}\}$, $\{\mathit{lb}\}$, $\{\mathit{rp}\}$, $\{\mathit{orc}\}$, $\{\mathit{erc}\}$, $\{\mathit{rb}\}$, deren Realisierungen keinen Winkel $> 90^o$ enthalten, kommen in N nur innerhalb von $G \cup V$, und innerhalb einer Erfüllbarkeits-Einzelkomponentente S_j vor, und für diese Mengen werden die Constraints nach Voraussetzung alle realisiert.

Daß sie den für sie konstruierten Constraint tatsächlich erfüllen, bleibt nun noch für die Tripel nachzuweisen, für die $e_1 \prec_r e_2 \prec_r e_3,\ \ e_3 \in L^\theta \cup C^\theta \cup S^\theta$ und $e_1^\theta, e_2^\theta, e_3^\theta$ nicht alle in der gleichen Erfüllbarkeits-Komponente $S_{(j)}^\theta$ liegen.

Ich zeige nun zuerst, daß für alle Punktetripel, die nur aufsteigende Paare enthalten, die Constraints erfüllt sind. Zunächst betrachte ich die Ausnahme, daß $e_2^\theta, e_3^\theta \in S_{(j)}^\theta$ in der gleichen Erfüllbarkeits-Komponente liegen. Dann ist die Steigung $\sigma(e_2^\theta, e_3^\theta) \leq 3$, und nach Voraussetzung $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > 9$, also wird $\{\ \mathit{rf}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta)$ realisiert. In allen anderen Fällen gilt wegen der Ordnungskorrektheit für $\prec$ für $e_1 \prec_r e_2 \prec_r e_3,\ \ e_1 \prec_o e_2 \prec_o e_3$:

$$(e_1, e_2) \prec (e_2, e_3) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < \sigma(e_2^\theta, e_3^\theta) \Rightarrow \{\ \mathit{lf}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta),$$

was den entsprechenden Constraint in $C_{\mathcal{F}}$ erfüllt (vgl. Tabelle 7.1).

Der Fall $e_3 \prec_o e_2 \prec_o e_1$ tritt außerhalb von $V^\theta \cup H^\theta \cup G^\theta$ nur auf, wenn $e_1 \in S_1, e_2 \in S_3, e_3 \in S_2$. Da θordnungskorrekt für $\prec_r$ ist, liegt S_3^θ auf einer Senkrechten s zur Grundlinie. Wenn jede Erfüllbarkeits-Einzelkomponente erfüllt wird, existiert ein an s gespiegeltes Tripel (f_1, f_2, f_3) mit $f_1 \in S_2, f_2 \in S_3, f_3 \in S_1$, $f_3 \prec_o f_2 \prec_o f_1$ und $f_3 \prec_r f_2 \prec_r f_1$. Für diese habe ich schon nachgewiesen, daß die Constraints von θerfüllt werden. Also gilt $\{\ \mathit{rf}\ \}(\{s_{j1}, s_{j4}\}, s_{k3} : s_{k5})$. $(j < k)$

$$\Rightarrow \{\ \mathit{lf}\ \}(s_{k5}, s_{k3} : \{s_{j1}, s_{j4}\}), \Rightarrow \{\ \mathit{lf}\ \}(\{s_{k1}, s_{k4}\}, s_{j3} : s_{j2})(j < k)$$

und sonst $\{\ \mathit{lf}\ \}(f_3^\theta, f_2^\theta : f_1^\theta)$, und damit

$$\{\ \mathit{rf}\ \}(f_1^\theta, f_2^\theta : f_3^\theta) \text{ und } \{\ \mathit{lf}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta),$$

wie gemäß Tabelle 7.1 gefordert.
In allen anderen Fällen ist entweder (e_1^θ, e_2^θ) oder (e_2^θ, e_3^θ) absteigendes Paar, das andere aufsteigendes Paar. Da für aufsteigende Paare mit $e_1^\theta \prec_o e_2^\theta$ in diesen noch zu untersuchenden Fällen nach Voraussetzung $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > 9$ gilt, und stets $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < -\frac{1}{9}$ für absteigende Paare, schließen sie einen Winkel $> 90^o$ ein, sodaß gilt:
$\{\ \mathit{lb}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta)$, falls (e_1^θ, e_2^θ) absteigend,
$\{\ \mathit{irc}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta)$, falls (e_2^θ, e_3^θ) absteigend,
$\{\ \mathit{ilc}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta)$, falls (e_1^θ, e_3^θ) und (e_1^θ, e_2^θ) absteigend,

$\{ \ \mathrm{rb} \ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : e_3^\theta)$, falls (e_1^θ, e_3^θ) und (e_2^θ, e_3^θ) absteigend,
also genau wie gemäß Tabelle 7.1 gefordert. (Vgl. Abbildung 7.12)

$\square$(Lemma 160)

Nun stelle ich die Instantiation vor, bei der die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Komponenten so groß sind, daß sie unabhängig von β ordnungskorrekt ist.

<u>Instantiation von L:</u>

Sei $d_{yl} := \Delta_1(y_0^\theta, l_0^\theta)$, $d_{hl} := \Delta_1(h^\theta, l_0^\theta)$ und $c_l = 1 + \frac{2d_{hl}}{d_{yl}}$ Dann gilt:

$$\begin{array}{ll}
l_{jk1}^\theta := (\kappa_1(l_0^\theta)\,;\,(c_l)^{(3j+k)} \cdot M_V)^{25} & \text{und} \\
l_{jk2}^\theta := (\kappa_1(l_0^\theta)\,;\kappa_1(l_{jkl}^\theta) + 3), & \text{falls } \beta(l_{jk}) = wahr \text{ bzw.} \\
l_{jk2}^\theta := (\kappa_1(l_0^\theta)\,;\kappa_1(l_{jkl}^\theta) + \frac{1}{3}), & \text{falls } \beta(l_{jk}) = falsch
\end{array}$$

ist eine Instantiation von L, von der ich zeigen werde, daß sie allen Constraints von $C_{\mathcal{F}}$ genügt.[26]
Man beachte, daß die Punkte so instanziert wurden, daß zugehörige Transferpunkte, bei jeder Belegung ein Parallelogramm bilden.

<u>Instantiation von C:</u>

Die Elemtente in C instanziere ich analog unter Nutzung der Instantiation der Elemente von X, Y und L.

Sei der Wert $M_L :\geq \max_{l^\theta \in L^\theta} \kappa_2(l^\theta) > 3M_V$ mindestens der maximale Koordinatenwert in der Menge L^θ der Interpretationen der Literale-Komponenten, $d_c := min\{\Delta_1(y_0^\theta, l_0^\theta)\Delta_1(l_0^\theta, c_0^\theta)\}$ und $d_{hc} := \Delta_1(h^\theta, c_0^\theta)$, $c_c = 1 + \frac{2d_{hc}}{d_c}$ dann ist durch

$$\begin{array}{l}
c_{j1}^\theta := (\kappa_1(c_0^\theta)\,;\,(c_c)^{j+1} \cdot M_L), \\
c_{j2}^\theta := (\kappa_1(c_0^\theta)\,;\,\kappa_2(c_{j1}^\theta) + \Delta_2(l_{j11}^\theta, l_{j12}^\theta)), \\
c_{j3}^\theta := (\kappa_1(c_0^\theta)\,;\,\kappa_2(c_{j2}^\theta) + \Delta_2(l_{j21}^\theta, l_{j22}^\theta)), \\
c_{j4}^\theta := (\kappa_1(c_0^\theta)\,;\,\kappa_2(c_{j3}^\theta) + \Delta_2(l_{j31}^\theta, l_{j32}^\theta))
\end{array}$$

eine Instantiation gegeben, von der ich zeigen werde, daß s ie zusätzlich allen neuen Constraints von $C_{\mathcal{F}}$ genügt. Ich wähle

$$M_L = 23^{(3m+4)} \cdot M_V, \;\; d_{hc} = 2.4, \;\; d_c = 0.2, \;\; c_c = 25.$$

[26]Ich stelle hier nicht die Möglichkeit mit den kleinsten Werten vor. Da die Werte sowieso riesig werden, habe ich Werte gewählt, bei denen man leicht sieht, daß sie die Constraints erfüllen

Man beachte, daß die Punkte so instanziert wurden, daß zugehörige Transferpunkte, also $c_{jk}, c_{j(k+1)}, l_{jk1}, l_{jk2}$, bei jeder Belegung ein Parallelogramm bilden.

Instantiation von S:

Für die Instantiation der Elemtente in S nutze ich erneut, daß die Elemente von X, Y, L und C bereits interpretiert sind.
Sei der Wert $M_C :\geq \max_{c^\theta \in C^\theta} \kappa_2(c^\theta)$ mindestens der maximale y-Koordinatenwert in der Menge L^θ der Interpretationen der Klausel-Komponenten,
$d_s := \min\{\Delta_1(y_0^\theta, l_0^\theta), \Delta_1(l_0^\theta, c_0^\theta), \Delta_1(c_0^\theta, s_{01}^\theta), \}$
$d_{hs} := \Delta_1(h^\theta, s_{02}^\theta)$, $c_s := 2 + \frac{2d_{hs}}{d_s}$,
dann ist durch

$s_{j1}^\theta := (2\ ;\ (c_s)^j \cdot M_C)$,
$s_{j4}^\theta := (2\ ; \kappa_2(s_{j1}^\theta) + \Delta_2(c_{j1}^\theta, c_{j4}^\theta))$,
$s_{j2}^\theta := (5\ ; \kappa_2(s_{j1}^\theta))$,
$s_{j5}^\theta := (5\ ; \kappa_2(s_{j1}^\theta) + \Delta_2(c_{j1}^\theta, c_{j4}^\theta))$,
$s_{j3}^\theta := (3.5\ ; \kappa_2(s_{j1}^\theta) + \frac{1}{2}\Delta_2(c_{j1}^\theta, c_{j4}^\theta))$,

eine Instantiation gegeben, von der ich zeigen werde, daß sie zusätzlich allen neuen Constraints von $C_\mathcal{F}$ genügt. Ich wähle

$$M_C = (c_c)^{(m+1)} M_L,\ \ d_s = 0.2,\ \ c_s = 62.$$

Man beachte, daß die Punkte so instanziert wurden, daß zugehörige Transferpunkte, also $c_{j1}, c_{j4}, s_{j1}, s_{j4}$, bei jeder Belegung ein Parallelogramm bilden.

Bemerkung 161 (Ordnungskorrektheit) *:*
Diese Instantiation ist zu jeder Belegung β ordnungskorrekt für $\prec_r, \prec_o, \prec$.

Beweis:
Ordnungskorrektheit für $\prec_r$ und $\prec_o$:
Die Ordnungskorrektheit für $\prec_r$ gilt, weil die Elemente auf den Senkrechten über den entsprechenden Grundlinienpunkten instanziert wurden, sodaß die ersten Koordinaten unabhängig von β sind, wobei die Ordnung $\prec_r$ genau so definiert wurde, daß sie der Ordnung der ersten Koordinaten dieser Grundlinienpunkte entspricht.
Die Ordnungskorrektheit für $\prec_o$ gilt, weil die Reihenfolge entlang der Punkte auf den Senkrechten der lexikografischen Reihenfolge entspricht. Die 2. Koordinaten innerhalb einer Senkrechten werden zunehmend größer. Denn innerhalb

einer Einzelkomponente sind sie als Summe der Koordinaten der Punkte davor und der Koordinatendifferenz $0 < \Delta_2(e_1^\theta, e_2^\theta) \leq 3$ der Punkte e_1^θ, e_2^θ einer früheren funktionalen Menge definiert, mit denen sie in einer TransferEinzelkomponente vorkommen. Zwischen verschiedenen Einzelkomponenten besteht wegen $M_C > M_L > M_V > 4 \cdot 3$ ein hinreichend großer Abstand zu Punkten der nächstniedrigeren Einzelkomponente, also liegt$l^\theta_{j,k+1,1}$ oberhalb von l^θ_{jk2} und $c^\theta_{j+1,1}$ oberhalb von c^θ_{j4}, etc.

Ordnungskorrektheit für $\prec$:

Behauptung:

Wenn θordnungskorrekt für $\prec_o$ und $\prec_r$ ist, so muß die Ordnungskorrektheit für $\prec$ nur noch für $(e_1, e_2), (e_3, e_4)$ mit $e_2 \preceq_r e_4, e_2 \prec_o e_4$ nachgewiesen werden (***„Normalfall“*** ; vgl. Abbildung 7.13a.).

Denn angenommen, sie gelte für diese Tupel. Wenn $e_2 = e_4$, dann gilt (vgl. Definition **??**)

$$(e_1, e_4) \prec (e_3, e_4) \iff (e_1 \prec_r e_3 \prec_r e_4) \iff \Delta_1(e_1^\theta, e_4^\theta) > \Delta_1(e_3^\theta, e_4^\theta).$$

Wenn außerdem $e_1 \prec_o e_3$ (vgl. Abbildung 7.13b.), dann sind $(e_1, e_3) \prec (e_3, e_4)$ zwei aufsteigende Paare mit $e_3 \preceq_r e_4, e_3 \prec_o r_4$. Nach Annahme gilt für diese die Ordnungskorrektheit

$$\sigma(e_1^\theta, e_3^\theta) < \sigma(e_3^\theta, e_4^\theta).$$

Genau dann gilt wegen $e_1^\theta \prec_r e_3^\theta \prec_r e_4^\theta$

$$\sigma(e_1^\theta, e_4^\theta) < \sigma(e_3^\theta, e_4^\theta),$$

was zeigt, daß das ursprüngliche Paar $(e_1, e_4) \prec (e_3, e_4)$ ordnungskorrekt ist.

Wenn $e_2 = e_4$ und $e_3 \preceq_o e_1$ (vgl. Abbildung 7.13.b), dann gilt wegen $\Delta_2(e_1, e_4) \leq \Delta_2(e_3, e_4)$

$$(e_1, e_4) \prec (e_3, e_4) \iff \sigma(e_1, e_4) = \frac{\Delta_2(e_1, e_4)}{\Delta_1(e_1, e_4)} < \frac{\Delta_2(e_3, e_4)}{\Delta_1(e_3, e_4)} = \sigma(e_3, e_4)$$

Den Fall $e_2 = e_4$ bezeichne ich weiter unten als ***„Spezialfall“*** .

Und für alle anderen Fälle ($e_4 \prec_r e_2$ oder $e_4 \prec_o e_2$) [27] (vgl. Abbildung 7.13.d) gilt dann

$$(e_1, e_2) \not\prec (e_3, e_4) \iff (e_3, e_4) \prec (e_1, e_2) \iff \sigma(e_3^\theta, e_4^\theta) < \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) \not< \sigma(e_3^\theta, e_4^\theta).$$

---

[27] $e_2 \prec_r e_4$ und $e_2 =_o e_2$ kommt nur für e_2, e_4 innerhalb der gleichen Einzelkomponente vor, und muß daher hier nicht betrachtet werden.

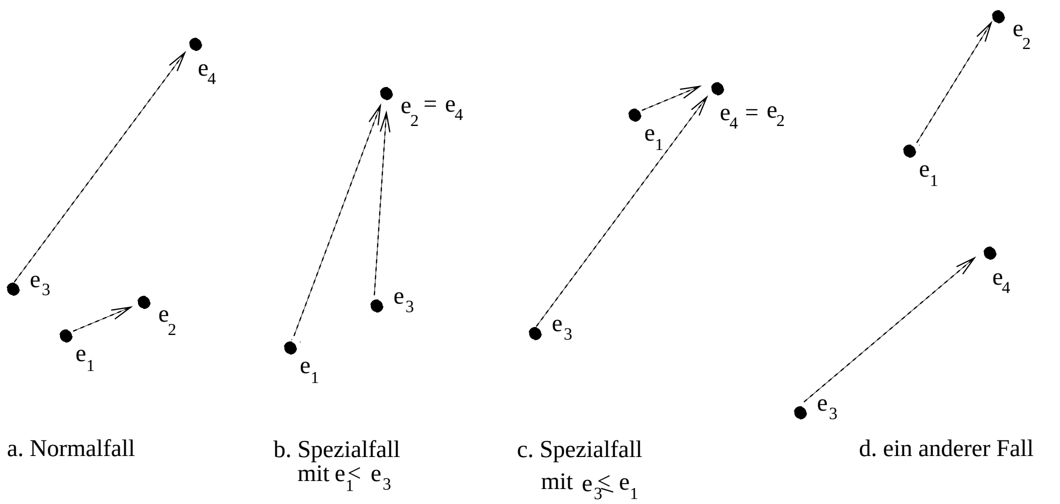


Abbildung 7.13: Skizzen zum Nachweis der Ordnungskorrektheit von $\prec$ a. Normalfall, b./c. Spezialfall, d. allgemeiner Fall

$\square$(Behauptung)

Zuerst zeige ich, daß $(e_1, e_2) \prec (e_3, e_4)$ (wobei $e_4 \in L$) ordnungskorrekt ist. Wie gesehen, kann ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_1 \prec_r e_2 \preceq_r e_4,\ e_2 \prec_o e_4 = l_{jkl}$, also $e_2 \in \{h\} \cup V^+$ annehmen. Weiterhin seien e_2, e_4 sowie e_3, e_4 jeweils in verschiedenen Einzelkomponenten. Nun ist

$$\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) \;=\; \frac{\Delta_2(e_1^\theta,e_2^\theta)}{\Delta_1(e_1^\theta,e_2^\theta)} \;\leq\; \frac{(c_l)^{(3j+k-1)}M_V+3}{d_{yl}} \;<\; \frac{2(c_l)^{(3j+k-1)}M_V}{d_{yl}}$$

und

$$(e_3^\theta, e_4^\theta) \;=\; \frac{\Delta_2(e_3^\theta,e_4^\theta)}{\Delta_1(e_3^\theta,e_4^\theta)} \;\geq\; \frac{(c_l)^{3j+k}M_V-M_V)}{d_{hl}} \;>\; \frac{(c_l)^{(3j+k-1)}M_V(c_l-1)}{d_{hl}} \;=\; \frac{2(c_l)^{(3j+k-1)}M_V}{d_{yl}}$$

Analog zu $e_4 \in L$ läßt sich zeigen die Ordnungskorrektheit für Tupel mit $e_4 \in C$ zeigen. Für Tupel mit $e_4 \in S$ zeigen, ist dieser Nachweis nur leicht modifiziert: Sei nun $e_4 \in S_{(k)}$, dann gilt
$0 \leq \kappa_2(e_1^\theta), \kappa_2(e_2^\theta) < M_{S_{(k-1)}} + 9;\ \ M_{S_{(k)}} := (c_s)^k \cdot M_C > 9,$

$$\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) \;=\; \frac{\Delta_2(e_1^\theta,e_2^\theta)}{\Delta_1(e_1^\theta,e_2^\theta)} \;\leq\; \frac{(c_s)^{(k-1)}M_V+3}{d_{ys}} \;<\; \frac{2(c_s)^{(k-1)}M_V}{d_s}$$

und

$$(e_3^\theta, e_4^\theta) \;=\; \frac{\Delta_2(e_3^\theta,e_4^\theta)}{\Delta_1(e_3^\theta,e_4^\theta)} \;\geq\; \frac{(c_s)^k M_V-M_V-12)}{d_{hs}} \;>\; \frac{(c_s)^{(k-1)}M_V(c_s-2)}{d_{hs}} \;=\; \frac{2(c_s)^{(k-1)}M_V}{d_{ys}}$$

Damit ist gezeigt, daß $G^\theta \cup H^\theta \cup V^\theta \cup L^\theta \cup C^\theta$ ordnungskorrekt für $\prec$ ist.

$\square$(Ordnungskorrektheit 161)

Auch die übrigen Voraussetzungen von Lemma 160 sind erfüllt:
Die Constraints innerhalb jeder Einzelkomponente $S_{(j)}$ sind erfüllt, weil nach Voraussetzung (β erfüllend) mindestens eines der in der j-ten Klausel vorkommenden Literale den Wert *wahr* hat. Denn dann gilt nämlich:

$$\begin{array}{rcrcl} & & dist(s^\theta_{j1}, s^\theta_{j4}) & = & k^j M_C \cdot \frac{d_{ls}}{d_{lc}} + dist(c^\theta_{j1}, c^\theta_{j4}) - k^j M_c \cdot \frac{d_{ls}}{d_{lc}} \\ & = & dist(c^\theta_{j1}, c^\theta_{j4}) & = & dist(l^\theta_{j11}, l^\theta_{j12}) + dist(l^\theta_{j21}, l^\theta_{j22}) + dist(l^\theta_{j31}, l^\theta_{j32}) \\ & \geq & 3 + \frac{2}{3} & > & 3 \\ & \text{und} & dist(s^\theta_{j1}, s^\theta_{j2}) & = & 3 \end{array}$$

Daher bilden $s_{j1}, s_{j2}, s_{j5}, s_{j4}$ ein Rechteck, das höher als breit ist, und s_{j3} ist Mittelpunkt, sodaß die Relationen innerhalb von S_j alle realisiert sind.

Als weitere Voraussetzung des Erfüllbarkeitskriteriums 160 weise ich nun nach, daß alle absteigenden Paare so instanziert wurden, daß Steigung der zugehörigen Geraden höchstens $-\frac{1}{9}$ ist, und bei aufsteigenden Paaren $\sigma(e^\theta_1, e^\theta_2) \leq 9$ nur innerhalb einer Variablen-Einzelkomponente V_i oder innerhalb einer Erfüllbarkeits-Einzelkomponente $S_{(j)}$ vorkommt.
Für alle anderen Paare von Elementen e_1, e_2, die in verschiedenen Senkrechten liegen, ist stets $\Delta_2(e^\theta_1, e^\theta_2) \geq 3M_V > 54$, aber $\Delta_1(e^\theta_1, e^\theta_2) \leq 6$, also $\sigma(e^\theta_1, e^\theta_2) > 9$. Für absteigende Paare gilt $\sigma(e^\theta_1, e^\theta_2) \leq -\frac{1}{9}$, weil innerhalb von V^θ und innerhalb einer Erfüllbarkeits-Einzelkomponente S^θ_j jeweils $|\Delta_2(e^\theta_1, e^\theta_2)| \geq \frac{1}{3}$ sein wird, und $\Delta_1(e^\theta_1, e^\theta_2) \leq 3$ gilt, und ansonsten $|\Delta_2(e^\theta_1, e^\theta_2)| \geq 1$ und $\Delta_1(e^\theta_1, e^\theta_2) \leq 6$.

Damit sind alle Voraussetzungen für Lemma 160 nachgewiesen, woraus folgt, daß alle Constraints innerhalb von N erfüllt sind.

Vorgehensweise bei der Instantiation der Transferelemente:
Es bleibt noch zu zeigen, daß auch die Constraints mit Nichttransferelementen erfüllt werden.

Alle Transfergeraden sind durch die Instantiation von $X \cup L \cup C \cup S$ festgelegt. Nun müssen nur noch die Transferpunkte so auf ihnen so festgelegt werden, daß alle Constraints, die Transferpunkte betreffen, realisiert werden.
Um die Relationen

$$\begin{gathered} \mathit{Transfer}\ (x_{i1}, x_{i2} : l_{jk1}, l_{jk2}, \bar{l}_{jk1}, \bar{l}_{jk2})\ \text{(bzw.}\ \ \mathit{Transfer}\ (\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2} : l_{jk1}, l_{jk2}, \bar{l}_{jk1}, \bar{l}_{jk2})) \\ \mathit{Transfer}\ (l_{jk1}, l_{jk2} : c_{jk}, c_{j(k+1)}, \bar{c}_{jk1}, \bar{c}_{jk2}) \\ \mathit{Transfer}\ (c_{j1}, c_{j4} : \sigma_{j1}, \sigma_{j4}, \bar{s}_{j1}, \bar{s}_{j4}) \end{gathered}$$

zu realisieren, müssen die Transferelemente rechts oben auf ihrer Transfergerade instanziert werden ($t^\theta \in \ell(a^\theta_t, b^\theta_t)$). Wenn die Transferpunkte dabei ausreichend weit von N entfernt instanziert werden, so daß $N \prec_o T$, $N \prec_r T$

ordnungskorrekt in θist, können die Voraussetzungen für folgendes Lemma erfüllt werden:

Lemma 162 (Erfüllbarkeit der Transferrelationen) *:*
Wenn N^θ die Voraussetzungen von Lemma 160 erfüllt, und Elemente t_1, t_2 in der gleichen Transfer-Einzelkomponente jeweils so instanziert sind, daß $\ell(t_1^\theta, t_2^\theta)$ senkrecht auf beiden Transfergeraden steht und $N^\theta \prec_o t_i^\theta$, $N \prec_r t_i$ (für $i \in \{1,2\}$) gilt, dann sind alle Constraints für $(n, t_1 : t_2)$ unabhängig von β erfüllt.

Beweis:
Nach Voraussetzung liegt N^θ in jedem Fall ganz auf der Halbebene unterhalb der Referenzlinie $\ell(t_1, t_2)$. Wäre ein Constraint $\{\ \mathtt{Transfer}\ \}(a_{t_1}, a_{t_2} : b_{t_1}, b_{t_2}, t_1, t_2)$ nicht für alle β erfüllt, gäbe es ein β, sodaß n^θ
oberhalb von $\ell(a_{t_1}^\theta, {b_{t_1}}^\theta)$ liegt, falls

$$\{\ \mathtt{lb}\ \}(t_1, t_2 : n) \iff \{\ \mathtt{rb}\ \}(a_{t_1}, b_{t_1} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{irc}\ \}(a_{t_1}, b_{t_1} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{rf}\ \}(a_{t_1}, b_{t_1} : n)$$

gefordert wird, unterhalb von $\ell(a_{t_2}^\theta, {b_{t_2}}^\theta)$, falls

$$\{\ \mathtt{lf}\ \}(t_1, t_2 : n) \iff \{\ \mathtt{lb}\ \}(a_{t_2}, b_{t_2} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{ilc}\ \}(a_{t_2}, b_{t_2} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{lf}\ \}(a_{t_2}, b_{t_2} : n)$$

gefordert wird oder nicht zwischen $\ell(a_{t_1}^\theta, {b_{t_1}}^\theta)$ und $\ell(a_{t_2}^\theta, {b_{t_2}}^\theta)$, falls

$$\begin{array}{ccl} \{\ \mathtt{elc}\ \}(t_1, t_2 : n) & \iff & \{\ \mathtt{rb}\ \}(a_{t_2}, b_{t_2} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{irc}\ \}(a_{t_2}, b_{t_2} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{rf}\ \}(a_{t_2}, b_{t_2} : n) \\ \text{und} & & \{\ \mathtt{lb}\ \}(a_{t_1}, b_{t_1} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{ilc}\ \}(a_{t_1}, b_{t_1} : n) \text{ oder } \{\ \mathtt{lf}\ \}(a_{t_1}, b_{t_1} : n) \end{array}$$

gefordert wird, im Widerspruch dazu, daß die Constraints für $(a_{t_1}, b_{t_1} : n)$ und $(a_{t_1}, b_{t_1} : n)$ nach Lemma 160 für jedes β erfüllt werden.

$\Box$(Lemma 164)

Ich weise nun zunächst nach, daß bei jeder Belegung die Ordnungskorrektheit für $\prec_t$ gilt, und nutze dann diese Eigenschaft, um die Erfüllbarkeit der Constraints nachzuweisen, die mindestens zwei Transferelemente betreffen. Zuletzt werde ich nochmals Gebrauch von den Ordnungen $\prec_o, \prec_t$ und $\prec$ machen [28], um auch die Erfüllbarkeit der übrigen Constraints nachzuweisen:

Lemma 163 ($\prec_t$-Ordungskorrektheit) *:*
Für alle $t_1, t_2 \in T$ gilt:

$$\begin{array}{ccccc} t_1 =_t t_2 & \iff & \sigma_{t_1} := \sigma(a_{t_1}^\theta, b_{t_1}^\theta) & = & \sigma_{t_2} = \sigma(a_{t_2}^\theta, b_{t_2}^\theta) \\ t_1 \prec_t t_2 & \iff & \sigma_{t_1} := \sigma(a_{t_1}^\theta, b_{t_1}^\theta) & < & \sigma_{t_2} = \sigma(a_{t_2}^\theta, b_{t_2}^\theta) \end{array}$$

[28]Diese wurden genau so definiert, daß die Constraints auf ihnen basieren

Beweis:
Aus der Ordnungskorrektheit für $\prec$ folgt, daß jede Transfergerade zu $\bar{c} \in T_C$, die einen Punkt in L^θ und einen in C^θ enthält, steiler ist als jede Transfergerade zu $\bar{l} \in T_L$. Analog für T_S und T_C. Deshalb gilt

$$\forall\ \bar{l}^\theta \in T_L^\theta,\ \bar{c}^\theta \in T_C^\theta,\ \bar{s}^\theta \in T_S^\theta:\ \ \sigma_{\bar{l}} < \sigma_{\bar{c}} < \sigma_{\bar{s}}$$

(also ist $T_L^\theta \prec_t T_C^\theta \prec_t T_S^\theta$ korrekt)

Dies läßt sich auch nachrechnen:
$\sigma_{\bar{c}} > \sigma_{\bar{l}}$, denn $\kappa_2(a_{\bar{c}}) < M_L$, $\kappa_2(b_{\bar{c}}) \geq 2M_L c_c$, $\Delta_1(a_{\bar{l}}^\theta, (b_{\bar{l}})^\theta) < 2$,
also $\sigma_{\bar{c}} > \frac{2c_c-1}{2} M_L > \frac{M_L}{d_{yl}}$ und $\sigma_{\bar{l}} \leq \frac{M_L}{d_{yl}}$.

$\sigma_{\bar{s}} > \sigma_{\bar{c}}$, denn $\kappa_2(a_{\bar{s}}) < M_C$, $\kappa_2(b_{\bar{s}}) \geq M_C c_s$, $\Delta_1(a_{\bar{c}}^\theta, (b_{\bar{c}})^\theta) < 2$,
also $\sigma_{\bar{s}} > \frac{c_s-1}{2} M_C > \frac{M_C}{d}$ und $\sigma_{\bar{c}} \leq \frac{M_C}{d}$.

Zusammengehörige Transfergeraden haben immer die gleiche Steigung, also $\sigma_{\bar{l}_{jk1}} = \sigma_{\bar{l}_{jk2}}$. Denn die zugehörigen Nichttransferpunkte $a^\theta_{\bar{l}_{jk1}}, a^\theta_{\bar{l}_{jk2}}, b^\theta_{\bar{l}_{jk1}} = l^\theta_{jk1}$ und $b^\theta_{\bar{c}_{jk2}} = l^\theta_{jk2}$ bilden bei jeder Belegung ein Parallelogramm.
Entsprechend für $\bar{c}_{jk1}$ und $\bar{c}_{jk2}$ sowie für $\bar{s}_{j1}$ und $\bar{s}_{j4}$.

Nun weise ich die Korrektheit innerhalb der drei funktionalen Mengen T_L, T_C, T_S nach.

In Bezug auf T_L gilt, daß Transfergeraden in ${C_\mathcal{F}}^\theta$ in lexikografischer Ordnung zunehmend steiler sind, da der Abstand $d_{l_{jk}} = \Delta_2(l^\theta_{jkl}, l^\theta_{j,k+1,l}) = M_V$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten $l^\theta_{jkl}, l^\theta_{j,k+1,l}$ auf der Senkrechten L^θ ist größer als der Abstand $d_{x_{jk}} = \Delta_2(a^\theta_{\bar{l}_{jk1}}, a^\theta_{\bar{l}_{j,(k+1),1}})$ der entsprechenden Punkte auf der Senkrechten X^θ, der ja stets $< M_V - 12$ ist [29]. Denn

$$\Delta_2(a^\theta_{\bar{l}_{j,(k+1),1}}, b^\theta_{\bar{l}_{j,(k+1),1}}) = \Delta_2(a^\theta_{\bar{l}_{jk1}}, b^\theta_{\bar{l}_{jk1}}) + d_{l_{jk}} - d_{x_{jk}} > \Delta_2(a^\theta_{\bar{l}_{jk1}}, b^\theta_{\bar{l}_{jk1}})$$

Nach Division durch $\Delta_1(a^\theta_{\bar{l}_{jk1}}, b^\theta_{\bar{l}_{jk1}}) = \Delta_1(a^\theta_{\bar{l}_{jk2}}, b^\theta_{\bar{l}_{jk2}}) = \Delta_1(x_0^\theta, l_0^\theta)$, folgt

$$\sigma_{\bar{l}_{j,(k+1),1}} > \sigma_{\bar{l}_{jk1}}$$

(Analog $\sigma_{\bar{l}_{(j+1),1,1}} > \sigma_{\bar{l}_{(j,3,1}}$.)

xxx: ganz entsprechend wegkuerzen?

In Bezug auf die Transfergeraden von T_C gilt $\sigma_{\bar{c}_{j11}} < \sigma_{\bar{c}_{j+1,3,1}}$, wieder weil der Abstand $d_{c_j} > 2M_L - 9 > M_L$ zwischen c^θ_{j1} und $c^\theta_{j+1,4}$ auf C^θ größer ist als der

[29] M_V ist der maximale Wert, und jeder Wert ist größer als der Offset 9

entsprechende Abstand $d < M_L$ zwischen $l^\theta_{j,1,l}$ und $l_{j+1,3,1}$ auf der Senkrechten L^θ. Denn mit $d_{lc} = \Delta_1(a^\theta_{\bar{c}_{jk}}, b^\theta_{\bar{c}_{jk}}) = \Delta_1(l^\theta_0, c^\theta_0) = 0.4$ ergibt sich:

$$\sigma_{\bar{c}_{j1}} = \frac{\Delta_2(a^\theta_{\bar{c}_{j1}}, b^\theta_{\bar{c}_{j1}})}{d_{lc}} < \frac{(c_c)^{j+1} M_L}{d_{lc}}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{c}_{(j+1),31}} &= \frac{\Delta_2(a^\theta_{\bar{c}_{(j+1),31}}, b^\theta_{\bar{c}_{(j+1),31}})}{d_{lc}} \\ &\geq \frac{(c_c)^{j+2} M_L - M_L}{d_{lc}} > \frac{(c_c)^{j+1}(c_c - 1) M_L}{d_{lc}} > \sigma_{\bar{c}_{j11}} \end{aligned}$$

Und $\sigma_{\bar{c}_{j(k+1)l}} < \sigma_{\bar{c}_{jkl}}$, denn Δ_1 ist für die entsprechenden Nichttransferpaare gleich, aber

$$\Delta_2(a^\theta_{\bar{c}_{j(k+1)}}, b^\theta_{\bar{c}_{j(k+1)}}) \leq \Delta_2(a^\theta_{\bar{c}_{jk}}, b^\theta_{\bar{c}_{jk}}) + 3 - M_V < \Delta_2(a^\theta_{\bar{c}_{jk}}, b^\theta_{\bar{c}_{jk}}).$$

Wie in Bezug auf T_L, so gilt auch in Bezug auf T_S, daß die Transfergeraden in lexikografischer Ordnung zunehmend steiler werden, weil der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Einzelkomponenten $S^\theta_{(j)}$ größer als $(c_s)^{j+2} M_C - ((c_s)^{j+1} M_C - 9) > (c_s)^{j+1}(c_s - 2) M_C > M_C$ ist, aber der Abstand der entsprechenden Punkte in C^θ kleiner als M_C ist.

$\square$(Lemma 163)

Lemma 164 (erfüllende Instantiation der Transferpunkte) *:*
Die Transferpunkte können ordnungskorrekt für $\prec_t$ so instanziert werden, daß die Constraints für $(T, T : T)$ und $(N, T : T)$ alle erfüllt werden.

Ich werde alle Transferpunkte weit rechts oben auf ihrer Transfergeraden instanzieren. Nach Lemma 162 sind Constraints für $\{\ \}(N, t_1 : t_2)$ mit $t_1 = t_2$ dann alle unabhänging von β erfüllbar. Den Nachweis, daß auch die Constraints

$$\textit{slope order}\ (\bar{t}_{11}, \bar{t}_{12} : \bar{t}_{21}, \bar{t}_{22}, \bar{t}_{31}, \bar{t}_{32}) \text{ für } t_{11} =_t t_{12} \prec_t t_{21} =_t t_{22} \prec_t t_{31} =_t t_{32},$$
$$\{\ \text{lf}\ \}(N, t_1 : t_2) \text{ für } t_1 \prec_t t_2$$

alle erfüllt werden, führe ich induktiv, indem ich zuerst die Transferpunkte auf den Geraden mit niedrigster Steigung instanziere und dann ein Paar $t_{j1} =_t t_{j2}$ nach dem anderen.
Bezeichne σ_k die Steigung des in der Ordnung $\prec_t$ k-ten Elements, also $\sigma_1 = \sigma_{\bar{l}_{111}} = \sigma_{\bar{l}_{112}}$, $\sigma_2 = \sigma_{\bar{l}_{121}} = \sigma_{\bar{l}_{122}}$ etc. und g_{k1}, g_{k2} die entsprechenden zwei Transfergeraden mit dieser Steigung, wobei g_{k1} unterhalb von g_{k2} liege.(also $g_{1\iota} = \ell(a^\theta_{\bar{l}_{11\iota}}, b^\theta_{\bar{l}_{11\iota}})$ ertc.)
Sei Z ein Wert, der größer ist als alle Koordinaten von Schnittpunkten von Geraden, die von Punktepaaren in $C_{\mathcal{F}}$ definiert werden. Da die Formel $\mathcal{F}$

endlich ist, existieren nur endlich viele Punkte, endlich viele Geradenschnittpunkte und damit existiert Z. Dann gilt für jede aufsteigende Gerade g, die die Grundlinie $\ell(x_0^\theta, y_0^\theta)$ rechts von $(Z;0)$ schneidet, daß die Schnittpunkte mit den Geraden geringerer Steigung oberhalb der Grundlinie liegen und zunehmend weiter rechts oben liegen, je steiler die geschnittene Gerade ist. Insbesondere für Transfergeraden gilt, daß ihr Schnittpunkt mit g weiter rechts oben liegt, wenn sie später sie in der Ordnung $\prec_t$ vorkommt (vgl. Abbildung 7.14). Diese Aussage verwende ich in meiner Konstruktion einer Instantiation:
Sei h_1 die Gerade durch $(Z;0)$ mit Steigung σ_3, t_{11} ihr Schnittpunkt mit der ersten Transfergeraden g_{11}, und t_{22} der Schnittpunkt mit der Transfergeraden g_{22}. Sei t_{12} der Schnittpunkt von g_{12} und der Orthogonale zur Parallelen g_{11} in t_{11}, analog t_{21} der Schnittpunkt von g_{21} und der Orthogonale zur Parallelen g_{22} in t_{22} Wenn Z hinreichend groß gewählt wird, liegt t_{11} oberhalb von N^θ (d. h. $\forall n \in N: \;\; \kappa_2(t_{11}) > \kappa_2(n^\theta)$), sodaß die Voraussetzung für Lemma 162 erfüllt sind, und $\ell(t_{12}, t_{21})$ schneidet die Grundlinie $\ell(x_0^\theta, y_0^\theta)$ in einem Punkt $(t_{01}; 0)$ mit $t_{01} > \kappa_1(s_{02}^\theta)$, denn $\sigma(t_{12}, t_{21}) \to \sigma_3$ für $Z \to \infty$. Ich instanziere dann

$$\bar{l}_{111}^\theta := t_{11}, \quad \bar{l}_{112}^\theta := t_{12}, \quad \bar{l}_{121}^\theta := t_{21}, \quad \bar{l}_{122}^\theta := t_{22}.$$

Dann gilt wie gefordert (vgl. Abschnitt 6.):
$\{\ \mathit{lf}\ \}(N^\theta, \bar{l}_{111}^\theta : \bar{l}_{121}^\theta)$, $\{\ \mathit{lf}\ \}(N^\theta, \bar{l}_{111}^\theta : \bar{l}_{122}^\theta)$, $\{\ \mathit{lf}\ \}(N^\theta, \bar{l}_{112}^\theta : \bar{l}_{121}^\theta)$, $\{\ \mathit{lf}\ \}(N^\theta, \bar{l}_{112}^\theta : \bar{l}_{122}^\theta)$,
weil für alle $n^\theta \in N$
$\sigma(t_{1\iota_1}, t_{2\iota_2}) \geq \sigma(t_{12}, t_{21}) = \sigma(t_{01}, t_{12}) > \sigma(n^\theta, t_{12}) > \sigma(n^\theta, t_{11})$

<u>Induktionsschritt:</u>
Wenn sich die ersten $2k$ Transferelemente, also alle mit zugehöriger Steigung $s \leq \sigma_k$, so instanzieren lassen, daß die Relationen *slope order* und $\{\ \mathit{lf}\ \}(N, t_1 : t_2)(t_1 \prec_t t_2)$ gelten, dann läßt sich das nächste Paar konsistent instanzieren.
<u>Beweis:</u>
Sei t_{j1}, t_{j2} die Instanzierung des j-ten Transferpunktepaares für $j \leq k$, so findet sich eine Instantiation $t_{(k+1),1}, t_{(k+1),2}$ des nächsten Transferpunktepaares auf folgende Weise: Dann sei h_k die Gerade durch t_{k1} mit Steigung σ_{k+2}, und $t_{(k+1),2}$ der Schnittpunkt von h_k mit $g_{(k+1),2}$, der rechts oberhalb existiert, weil $\sigma_{k+2} > \sigma_{k+1}$. Sei $t_{(k+1),1}$ der Schnittpunkt von $g_{(k+1),1}$ und der Orthogonale zur Parallelen $g_{(k+1),2}$ in $t_{(k+1),2}$. Dann gelten alle geforderten Constraints.
Für $j < k$ liegen g_{j1}, g_{j2} im Bereich rechts von $(Z;0)$ unterhalb von g_{k1}, also liegen t_{j1} und t_{j2} unterhalb von g_{k1}, aber t_{k1}, t_{k2} auf oder oberhalb von g_{k1}. Daher folgt für $j < k < l$ und $\iota_j, \iota_k, \iota_l \in \{1, 2\}$:

$$\sigma_{j+1} < \sigma(t_{j,\iota_j}, t_{k,\iota_k}) \leq \sigma(t_{k-1,1}, t_{k,2}) = \sigma_{k+1} < \sigma(t_{k,\iota_k}, t_{l,\iota_l})$$

Also gilt für $t_{j,\iota_j} \prec_t t_{k,\iota_k} \prec_t t_{l,\iota_l}$ die Relation $\{\ \mathit{lf}\ \}(t_{j,\iota_j}, t_{k,\iota_k} : t_{l,\iota_l})$, wie gefordert.

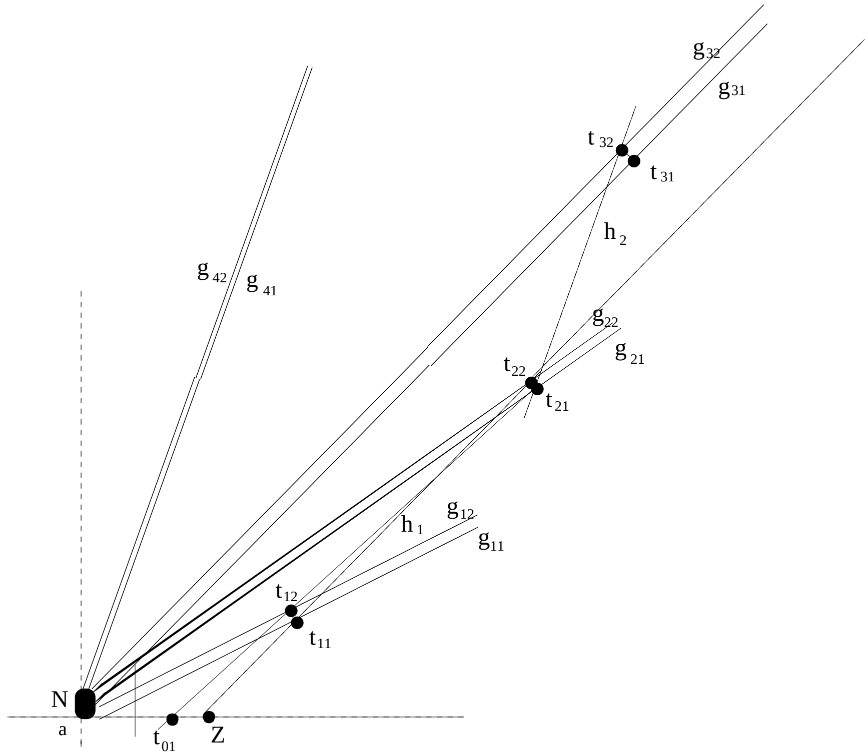


Abbildung 7.14: Konstruktion der Transferpunkte

Die Constraints für (N,T:T):

Ich bestimme nun die Relation von $(n^\theta, t_{j\iota_j} : t_{(k+1),\iota_k})$ $(j \leq k)$. Für $j = 1$ ist

$$\sigma(n^\theta, t_{1,\iota_1}) < \sigma(t_{01}, t_{1,\iota_1}) < \sigma_3 \leq \sigma(t_{j,\iota_j}, t_{(k+1),\iota_k}) \\ \Rightarrow \quad \{\ \mathfrak{lf}\ \}(n^\theta, t_{11} : t_{j\iota_j}).$$

Da für ein Nichttransferelement n und Transferelemente $t_{j\iota_j} \prec_t t_{(k+1)}$ (n, t_{j,ι_j}) und $(t_{j\iota_j}, t_{(k+1),\iota_k})$ aufsteigende Paare sind, gilt dann $\{\ \mathfrak{lf},\ \mathfrak{sf},\ \mathfrak{rf}\ \}(n^\theta, t_{j\iota_j} : t_{(k+1),\iota_k})$. Daraus folgt

$$\{\ \mathfrak{lf}\ \}(n^\theta, t_{j\iota_j} : t_{(k+1),\iota_k}) \;=\; \{\ \mathfrak{lf}\ \}(n^\theta, t_{11} : t_{j\iota_j}) \;{}_2\diamond_1\; \cap \;\{\ \mathfrak{lf},\ \mathfrak{sf},\ \mathfrak{rf}\ \}(n^\theta, t_{j\iota_j} : t_{(k+1),\iota_k})$$

$\square$(Lemma 164)

Die Constraints für (N,N:T):

Es bleibt nun nur noch nachzuweisen, daß die Constraints für $(N, N : T)$ erfüllt werden. Da die Transferpunkte hinreichend weit von N entfernt sind, kommt es nur auf Ordnung der Steigungen an, weshalb ich die Ordnungskorrektheit für $\prec$ nutze. Bei der Definition hatte ich drei Fälle unterschieden:

1. Fall: $e_1 =_o e_2$ und $e_1 =_r e_2$. (Dies gilt nur für die Elementepaare $(\bar{x}_{i1}, x_{i2})$). Für diese gilt in ${C_{\mathcal{F}}}^{\theta}$ $\{\ \mathrm{e}_{12}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : T^\theta)$, wie gefordert. Für $e_1 =_o e_2$ oder $e_1 =_r e_2$ gilt sonst der geforderte Constraint, weil $N \prec_o T,\ N \prec_r T$ ordnungskorrekt in θist.

2. Fall: (e_1, e_2) absteigendes Paar.
Da die Steigung der Geraden $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < -\frac{1}{9}$ beträgt und alle Transfergeraden steiler als $M_V > 9$ sind, gilt für jedes absteigende Paar (e_1, e_2) $\{\ \mathrm{lo}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : T^\theta)$, wie gefordert.

3. Fall: (e_1, e_2) aufsteigendes Paar.
Falls $e_2 \in G \cup V$ oder $e_1, e_2 \in S_i$ (beide in der gleichen Einzelkomponente), so ist $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < M_V < \sigma_t$ für $t \in T$.
Behauptung:
In ${C_{\mathcal{F}}}^{\theta}$gilt unabhängig von der Variablenbelegung β für alle anderen aufsteigenden Paare:

$$\begin{array}{l} (e_1, e_2) \prec (a_t, b_t) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta) \\ (e_1, e_2) \succ (a_t, b_t) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta) \end{array}$$

Denn wenn e_2 in der gleichen Einzelkomponente ist wie b_t, dann ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_2 = b_t$, denn die Steigungen der beiden parallelen Transfergeraden sind gleich, und dann gilt die Ordnungskorrektheit im Spezialfall(vgl. Beweis zur Bemerkung 161). Andernfalls folgt die Aussage aus der Ordnungskorrektheit für $\prec$.
Die zweite Zeile ergibt sich dann aus der ersten, weil $\sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) = \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta)$ für e_1, t oder e_2, t in verschiedenen Transferkomponenten nicht vorkommt. Denn sonst gilt: Wenn e_2 in einer anderen Einzelkomponente ist als t, dann
$(e_1, e_2) \prec (a_t, b_t) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta)$
oder $(e_1, e_2) \succ (a_t, b_t) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta)$ wegen der Ordnungskorrektheit.
Oder es existiert $(e_1)' \prec_o e_1$ in der gleichen Transferkomponente und
$(e_1, e_2) \succ ((e_1)', e_2) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > \sigma({(e_1)'}^\theta, e_2^\theta) = \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta)$
(Unter Ausnutzung der Ordnungskorrektheit im Spezialfall).
Oder $e_1 \prec_o (e_1)'$ in der gleichen Transferkomponente und

$$(e_1, e_2) \succ ((e_1)', e_2) \Rightarrow \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < \sigma({(e_1)'}^\theta, e_2^\theta) = \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta)$$

In allen Versionen des 3. Falls gilt

$$\begin{array}{rlcccc} & \text{für} & (e_1, e_2) \prec (a_t, b_t) & \Rightarrow & \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) < \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta) & \Rightarrow & \{\ \mathrm{lf}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : T^\theta) \\ \text{und} & \text{für} & (e_1, e_2) \succ (a_t, b_t) & \Rightarrow & \sigma(e_1^\theta, e_2^\theta) > \sigma(a_t^\theta, b_t^\theta) & \Rightarrow & \{\ \mathrm{rf}\ \}(e_1^\theta, e_2^\theta : T^\theta), \end{array}$$

wie gefordert, weil t weiter rechts liegt als der Schnitttpunkt der Transfergeraden mit $\ell(e_1^\theta, e_2^\theta)$.

Damit habe ich gezeigt, daß in der Tat alle Constraints von $C_{\mathcal{F}}$ durch θerfüllt werden.

3.Teil: Polynomialität der Reduktion

Nun ist nur noch zu zeigen, daß die Konstruktion tatsächlich polynomiell in der Größe der Formel $\mathcal{F}$ ist.

Behauptung:
Die Konstruktion ist polynomial in der Größe von $\mathcal{F}$.

Beweis:
$C_{\mathcal{F}}$ enthält 11 Grundgerüstelemente, $5n$ Elemente für die Variablen-Komponenten, $6m$ Elemente für die Literale-Komponenten, $4m$ für die Klausel-Komponenten, $5m$ für die Erfüllbarkeitstest-Komponenten, $6m$ für dieTransfer-Komponenten der Literaleschicht, $6m$ für die Transfer-Komponenten der Klauselschicht und $2m$ für die Transfer-Komponenten der Erfüllbarkeitstestschicht. Mit der stets gültigen Abschätzung $n \leq 3m$, enthält $C_{\mathcal{F}}$ insgesamt also nicht mehr als $44m+11$ Elemente und jeweils ein Basisconstraint zwischen jedem Tripel, also sind in der Konstruktion in $O(m^3)$ Bestimmungen der Basisrelationen nötig. Die aufwendigsten Bestimmungen der Basis-Constraints erfordern die Bestimmung von Ordnungen unter den Elementen. Die Konstruktion der Ordnungen auf den Transferelementen ist in $O(|T|^2) \in O(m^2)$, auf den Nichttransferelementen in $O(|N|^2) \in O(m^2)$ und die Konstruktion der Ordnung auf den Elementenpaaren in $O(|N|^4) \in O(m^4)$ möglich. Insgesamt ist die Konstruktion also polynomiell in m.

Damit ist gezeigt, daß es eine polynomielle Reduzierung von s-SAT nach $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$-SAT bewiesen. Also ist $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$-SAT NP-hart.

$\square$(theoremBIG)

7.3.3 Komplexität weiterer Basiskalküle

Korollar 165 ($\mathcal{B}(\mathfrak{SC})$-SAT und $\mathcal{B}(\mathfrak{DC})$-SAT sind NP-hart)

Beweis:
In dem Beweis kamen die Relationen $\{\mathfrak{eq}\}$, $\{\mathfrak{e}_{23}\}$, $\{\mathfrak{e}_{13}\}$, $\{\mathfrak{e}_{12}\}$, die in $\mathfrak{SC}$

und $\mathfrak{DC}$ nicht vorkommen, nur vor, um x_{i2} und $\bar{x}_{i1}$ zu identifizieren, die man aber auch direkt als eine Variable hätte einühren können. Daß ich dies nicht getan habe, liegt nur daran, daß sich so die Bedeutung leichter erschließt.
Man kann also diese $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$-SAT-Instanz weiter reduzieren auf $\mathcal{B}(\mathfrak{SC})$-SAT oder $\mathcal{B}(\mathfrak{DC})$-SAT, indem man die Variablen x_{i2} und $\bar{x}_{i1}$ durch die gleiche ersetzt. Jede Relation von $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ wird vollstandig definiert durch die $\mathfrak{SC}$- bzw. $\mathfrak{DC}$-Relationen auf den Permutationen des betreffenden Tripels, und jede von diesen ist eine $\mathfrak{SC}$- bzw. $\mathfrak{DC}$-Basisrelation, da $\mathfrak{RC}$ Verfeinerung der anderen beiden ist. Jedes so konstruierte $\mathfrak{SC}$-CSP bzw. $\mathfrak{DC}$-CSP ist daher erfüllbar, genau dann, wenn das $\mathfrak{RC}$-CSP erfüllbar ist.
Die Ersetzung ist in polynomieller Zeit durchführbar, da die 6 Permutationen aus einer Tabelle ausgelesen werden können, und somit pro Relation in einer Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$-SAT nur 6 einfache Ersetzungs- und Schnittoperationen notwendig sind.

□(Korollar 165)

Theorem 166 (NP-Härte von $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$) *:*
Auch das strenge Basiskalkül $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$ ist NP-hart.

Beweis:
Der folgende NP-Härte-Beweis benutzt wieder eine Transformation von dem als NP-vollständig bekannten aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblem NOT-ALL-EQUAL-3-SAT nach $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$-SAT. Der Beweis nutzt wieder die Methode des component design, daß heißt, es wird eine in der Größe von $\mathcal{F}$ polynomielle Konstruktion angegeben, die für jede Formel $\mathcal{F}$ von NOT-ALL-EQUAL-3-SAT eine Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$-SAT liefert, die erfüllbar ist, genau dann, wenn $\mathcal{F}$ erfüllbar ist.

<u>Die Konstruktion:</u>
Sei $\mathcal{F} = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee_{m3})$ eine Formel mit n Variablen und m Klauseln.
Die Grundidee der Konstruktion besteht darin, je ein Element pro Variable und pro negierter Variable zu definieren, und durch ein Konversionselement sicherzustellen, daß sie in jeder Interpretation verschiedene Wahrheitswerte erhalten. Von diesen literalen Elementen werden die Wahrheitswerte auf Erfüllbarkeitstest-Elemente transferiert, eines je Klausel, wobei die Literalvorkommen einer Klausel jeweils eine Kompontente bilden. Jede Erfüllbarkeitstest-Komponente ist genau dann erfüllbar, wenn die zugehörigen Literale verschiedene Wahrheitswerte aufweisen.
Im Unterschied zum vorigen Beweis werden Variablen und Literalvorkommen

in Klauseln durch jeweils Einzelpunkte repräsentiert, und der Transfer ist erheblich einfacher möglich. Die Grundidee der Interpretation besteht darin, sich die Wahrheitswerte der Elemente als wahr oder falsch vorzustellen, je nachdem, auf welcher Seite einer Geraden $\ell(c,t)$ die dem Element entsprechenden Punkte liegen. (c steht für Konversionselement, t für Transferelement.) Der Constraint $\{\ \mathtt{sc}\ \}(x,t:y)$ wirkt als Wahrheitswert-Transfer von x nach y, denn wenn y zwischen x und t liegt, liegt y auf der gleichen Seite der Geraden $\ell(c,t)$, da t ja einziger Schnittpunkt von Geraden $\ell(c,t)$ und Geraden $\ell(x,y)$ ist. Der Konvertierer-Constraint $\{\ \mathtt{f}\ \}(x,c:\bar{x})$ sorgt dafür, daß x und $\bar{x}$ entgegengesetzte Wahrheitswerte haben, denn dann liegen x und y auf verschiedenen Seiten von c (der Geraden $\ell(c,t)$). Auf diese Weise kann sichergestellt werden, daß die Literale x_i und $\bar{x}_i$ verschiedene Wahrheitswerte erhalten.
Es liegt nahe, $C_{\mathcal{F}}$ permutations- und kompositionskonsistent zu definieren, da sonst unabhängig von der Belegung die Konstellation nicht erfüllbar wäre. Da $C_{\mathcal{F}}$ permutationskonsistent konstruiert werden soll, genügt es, jeweils eine Relation unter den Punkten eines Tripels anzugeben, da die übrigen durch Permutation folgen. $C_{\mathcal{F}}$ besteht aus folgenden Komponenten:

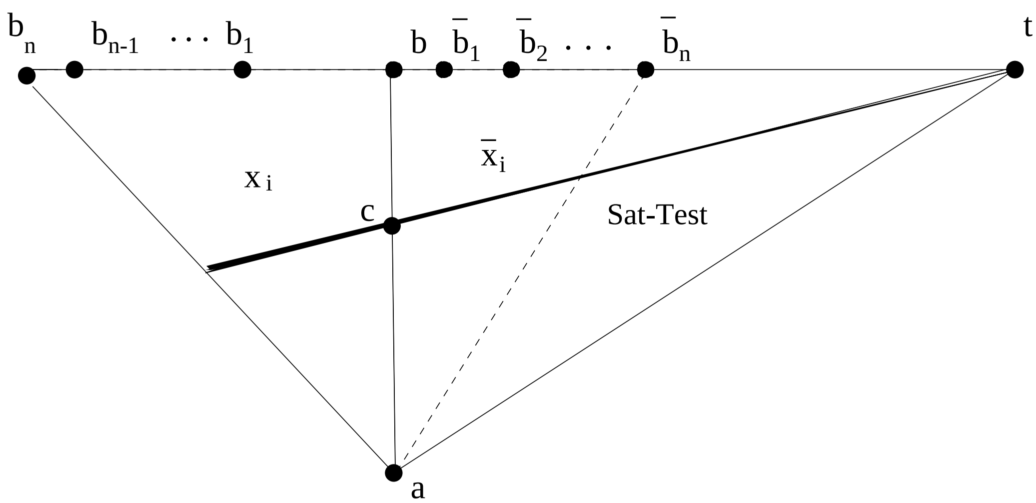


Abbildung 7.15: Das Grundgerüst der Konstruktion für den NP-Härte-Beweis für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$

1. <u>Grundgerüst:</u>
Das Grundgerüst besteht aus drei Elemente a, b_n, t mit Relation $\{\ \mathtt{t}\ \}(a, b_n : t)$, die ein Dreieck bilden, in dem in jeder Realisation alle vorkommenden Elemente liegen werden. Außerdem gehören zum Grundgerüst die Elemente $b_1, \ldots, b_{n-1}$ und $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ und b und c mit den Constraints $\{\ \mathtt{sf}\ \}(x, y : z)$(falls $x \prec y \prec z$), wobei $\prec$ die Ordnung

$$b_n \prec b_{n-1} \prec \ldots \prec b_1 \prec b \prec \bar{b}_1 \prec \bar{b}_2 \prec \ldots \prec \bar{b}_n \prec t$$

auf der Menge der bisher erwähnten Elemente außer a und c ist. Außerdem beinhalte I die Constraints $\{\ \texttt{sc}\ \}(a, b : c)$, und Realisierungxyzt für alle anderen Tripel (x, y, z) des Grundgerüsts.

In jeder Realisierung dieser Komponente liegt also c^θ im Inneren des Dreiecks $\Delta a^\theta b_1^\theta t^\theta$, das heißt, Geraden $\ell(c^\theta, t^\theta)$ teilt das Dreieck in zwei Gebiete. Die Punkte $b^\theta{}_2, \dots, b^\theta{}_n$ und $\bar{b}_1^\theta, \dots, \bar{b}_n^\theta$ müssen auf der a^θ geegenüberliegenden Seite realisiert sein. a^θ und die Punkte b_i^θ begrenzen das Gebiet, in dem die den Variablen entsprechenden Punkte zu liegen kommen müssen, a^θ und die Punkte $\bar{b}_i^\theta$ begrenzen das Gebiet, in dem die negierten Variablen repräsentiert werden. Der Rest, also der Teil zwischen a^θ, $\bar{b}_n^\theta$ und t^θ, wird das Gebiet sein, in dem die Erfüllbarkeitstestkomponenten realisiert werden müssen. All dies ist in Figur Abbildung 7.15 dargestellt.

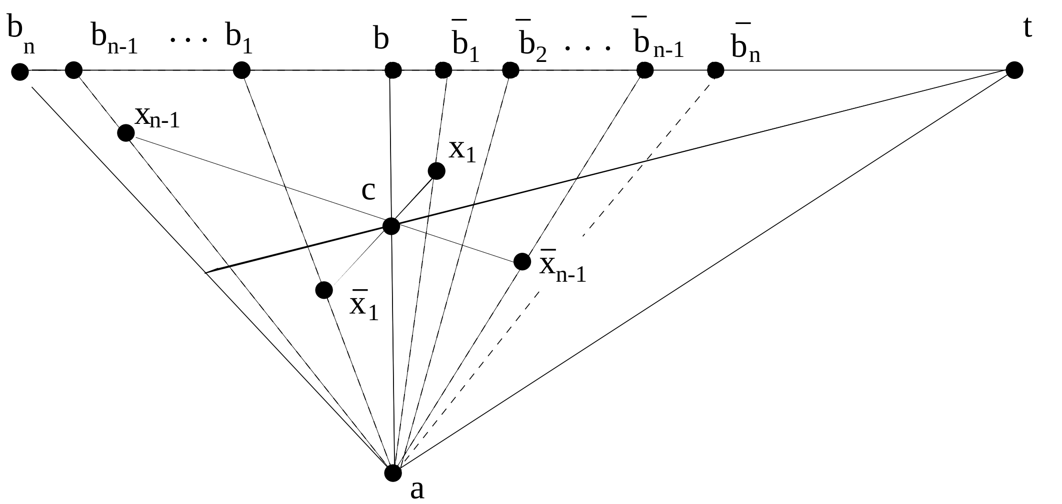
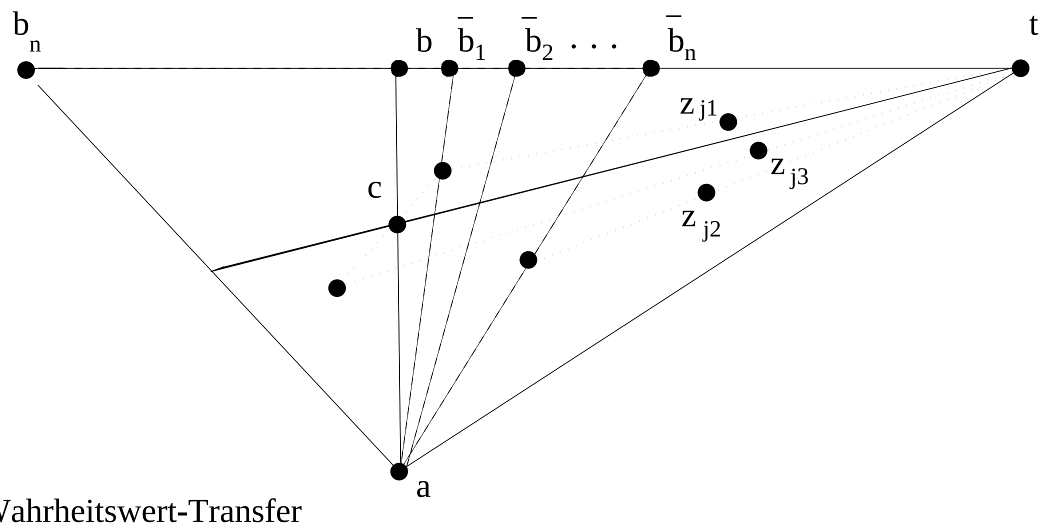


Abbildung 7.16: Die Integration der Veriablen-Elemente in den Wahrheitswertkomponenten der Konstruktion für den NP-Härte-Beweis von $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$

2. Wahrheitswert-Komponente:

Die Idee ist, daß Elemente x_i und $\bar{x}_i$ $(i \leq n)$ für die in $\mathcal{F}$ auftretenden Variablen und ihre Negationen eingeführt werden, sodaß das Element für die Variable x_i auf der Strecke zwischen a und b_i zu liegen kommt und das Element $\bar{x}_i$ zwischen a und $\bar{b}_i$, beide aber nicht auf der Geraden $\ell(c, t)$ realisiert werden können. Dies wird durch die Constraints $\{\ \texttt{sc}\ \}(a, b_i : x_i)$, $\{\ \texttt{sc}\ \}(a, \bar{b}_i : \bar{x}_i)$, $\{\ \texttt{t}\ \}(c, t : x_i)$, $\{\ \texttt{t}\ \}(c, t : \bar{x}_i)$ $(i \leq n)$ erreicht. Dabei entspreche eine Instantiation x^θ dem Wahrheitswert *falsch*, genau dann, wenn x^θ zwischen a^θ und der Geraden $\ell(c^\theta, t^\theta)$ liegt. Wie schon erwähnt, erreichen die zusätzlichen Constraints $\{\ \texttt{sc}\ \}(x_i, \bar{x}_i : c)$, daß x_i und $\neg x_i$ verschiedenen Wahrheitswerte entsprechen. (Vgl. Figur Abbildung 7.17). Alle nicht explizit angegebenen Constraints seien $\{\ \texttt{t}\ \}(x, y : z)$.



Wahrheitswert-Transfer
vollzieht sich entlang der gepunkteten Linien. Die durchgezogenen und gestrichelten Linien bilden das Grundgerüst.

Abbildung 7.17: Die Transferkomponente des NP-Härte-Beweises für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$. z_{jk} und x sind auf der gleichen Seite der Linie, die *wahr* von *falsch* trennt.

3. <u>Transfer</u>
Für jedes Literalvorkommen $z_{jk}(j \leq m, k \leq 3)$, wobei $z_{jk} = x_i$ oder $z_{jk} = \bar{x}_i$ beinhalte $C_{\mathcal{F}}$ ein Element z_{jk} mit dem Constraint $\{\ \mathtt{sc}\ \}(x_i, t : z_{jk})$ bzw. $\{\ \mathtt{sc}\ \}(\bar{x}_i, t : z_{jk})$, das erreicht, daß der Wahrheitswert transferiert wird. (Vgl. Figur Abbildung 7.17). Alle übrigen Constraints seien wieder $\{\ \mathtt{t}\ \}(x, y : z)$.

4. <u>Erfüllbarkeits-Test:</u>
Als Erfüllbarkeitstest-Komponente für jede Klausel $\{z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}\}$ werde dabei die in Figur Abbildung 7.18 dargestellte Komponente konstruiert:

Zusätzlich zu den drei Literalvorkommen-Elementen z_{j1}, z_{j2}, z_{j3} gehören dazu zwei Elemente, ein Hilfselement h_j und das Erfüllbarkeitstestelement s_j. Die Constraints

$$\{\ \mathtt{t}\ \}(z_{j1}, z_{j2} : z_{j3}), \{\ \mathtt{sc}\ \}(z_{j1}, z_{j2} : h_j) \text{ und } \{\ \mathtt{sc}\ \}(h_j, z_{j3} : s_j)$$

ereichen, daß s^θ in der Mitte des Dreiecks $\Delta z_{j1}^\theta z_{j2}^\theta z_{j3}^\theta$ liegt. Durch den Constraint $\{\ \mathtt{sc}\ \}(c, t : s_j)$ wird erreicht, daß s_j auf der Linie zwischen den beiden Wahrheitswerten liegt, was nur geht, wenn das Dreieck $\Delta z_{j1}^\theta z_{j2}^\theta z_{j3}^\theta$ die Linie $\ell(c^\theta, t^\theta)$ schneidet.
Anmerkung: In einer Realisierung von $C_{\mathcal{F}}$ ist damit der Fall ausgeschlossen, daß alle drei Punkte auf der gleichen Seite der Linie liegen, und daß somit die entsprechenden Wahrheitswerte in einer Klausel alle gleich sind.

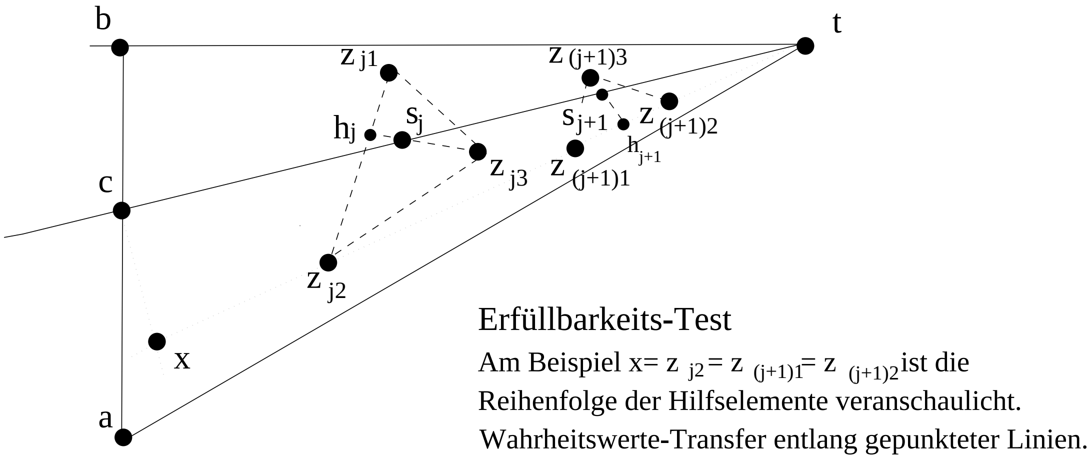


Abbildung 7.18: Die Erfüllbarkeitstestkomponenten des NP-Härte-Beweises für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$. Für alle j : z_{j1}, z_{j2} und z_{j3} sind auf der verschiedenen Seite der Linie, die *wahr* von *falsch* trennt. Genau in so einem Fall repräsentieren sie eine Erfüllung von NOT-ALL-EQUAL-3SAT.

Zusätzlich müssen noch Constraints zwischen den verschiedenen Erfüllbarkeitskomponenten angegeben werden. Falls es zu einem Variable- oder negierte-Variable-Element x mehrere Literalvorkommen $z_{j_1k_1}, \ldots, z_{j_lk_l}$ gibt, so seien unter diesen und ihren Hilfselementen $h_{j_\iota} (\iota \leq l)$ die Constraints $\{\ \mathfrak{sf}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$ (falls $e_1 \prec e_2 \prec e_3$) in I konstruiert, wobei $\prec$ die Ordnung

$$x \prec z_{11} \prec h_1 \prec z_{12} \prec z_{13} \ldots \prec z_{m1} \prec h_m \prec z_{m2} \prec z_{m3} \prec t$$

ist.
Außerdem gelte $\{\ \mathfrak{sf}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$(falls $e_1 \prec e_2 \prec e_3$) in $C_{\mathcal{F}}$, wobei $\prec$ die mit der lexikographischen übereinstimmende Ordnung

$$c \prec s_1 \prec s_2 \ldots \prec s_m \prec t$$

auf der Menge der auf $\ell(c^\theta, t^\theta)$ zu istanzierenden Elemente ist. Dadurch wird das CSP $C_{\mathcal{F}}$ konsistent unter Komposition. Alle Constraints zwischen bisher nicht angegebenen Tripeln seien wieder $\{\ \mathfrak{t}\ \}(x, y : z)$.
Diese Konstruktion kann offensichtlich in $O((n+m)^3)$, also in polynomieller Zeit ausgeführt werden.

Es bleibt zu zeigen, daß eine Instanz von NOT-ALL-EQUAL-3SAT eine Lösung hat, genau dann, wenn die derart konstruierte Konstellation als Intanz von $\mathfrak{RC}$-SAT konsistent ist.

<u>$\mathcal{B}(\mathfrak{L})$-SAT $\Rightarrow$ NOT-ALL-EQUAL-3SAT:</u>

Angenommen, daß die aus einer Instanz $\mathcal{F}$ konstruierte Konstellation $C_{\mathcal{F}}$ von $\mathfrak{RC}$-SAT erfüllbar ist, zum Beispiel durch θ. Dann erfüllt die Belegung β, die man erhält, wenn man jede Variable x_i mit *wahr* belegt, für die x_i^θ auf der von a^θ aus gegenüberliegenden Seite von $\ell(c^\theta, t^\theta)$ liegt, und alle anderen mit *falsch*, die Konstellation $\mathcal{F}$, was direkt aus der Anmerkung in "4. Erfüllbarkeitstest" folgt.

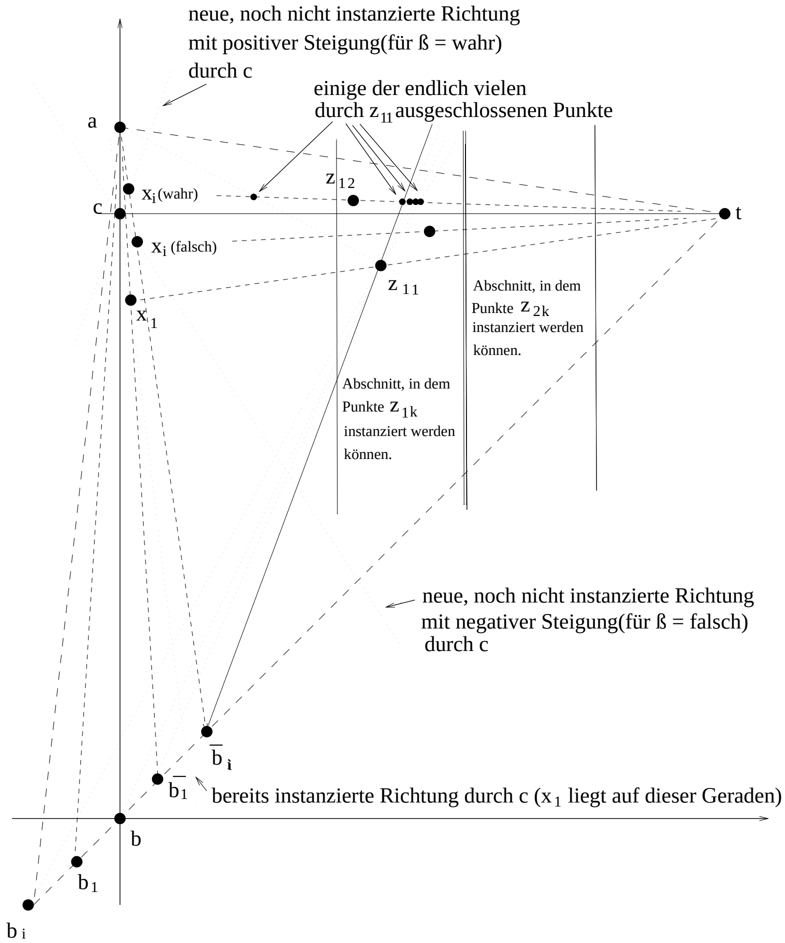
<u>NOT-ALL-EQUAL-3-SAT $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{L})$-SAT:</u>
Angenommen, $\mathcal{F}$ ist eine positive Instanz von NOT-ALL-EQUAL-3SAT und $C_{\mathcal{F}}$ ist die von $\mathcal{F}$ ausgehend konstruierte Instanz von $\mathfrak{RC}$-SAT. Dann es gibt eine Realisation θ, die mit alle Constraints in $C_{\mathcal{F}}$ konsistent ist. Dies zeige ich, indem ich nach der Definition eines geeigneten konsistenten Grundgerüsts induktiv zeige, daß bei geeigneter Reihenfolge der Instanzierungen jeder neue Punkt so instanziert werden kann, daß er konsistent mit allen ihn und die bereits instanzierten Punkte betreffenden Constraints ist.
Als eine konsistente Realisation des Grundgerüsts wähle ich

$$\begin{array}{llll} a^\theta & = (0\ ;\ 2n{+}3m{+}3), & b^\theta & = (0;0), \\ b_i^\theta & = (-i;-i), & \bar{b}_i^\theta & = (i;i), \\ t^\theta & = (n{+}3m{+}3\ ;\ n{+}3m{+}3) \quad \text{und} & c^\theta & = (0\ ;\ n{+}3m{+}3). \end{array}$$

(vergleiche Figur Abbildung 7.19 Nun werden der Reihe nach die Elemente $x_i, \bar{x}_i$ (paarweise), dann die z_{jk} in lexikographisch aufsteigender Reihenfolge, schließlich s_j und h_j instanziert.

Im folgenden stützt sich die Instanzierung auf die Beobachtung, daß zu jedem Zeitpunkt der Instanzierung nur endlich viele Punkte instanziert worden sind, und daher die Constraints $\{\ \mathtt{t}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$ keine wesentliche Einschränkung definieren. Der Beweis funktioniert also, weil das Basiskalkül von $\mathfrak{L}$"fast" (bis auf eine eindimensionale Menge) die universelle Relation enthält.
Sei nun etwa $\beta(x_i) = \mathit{wahr}$. Genau für jede Gerade durch c^θ mit positiver Steigung existiert ein Schnittpunkt mit $\ell(a^\theta, b_i^\theta)$ als Instantiation von x_i und ein Schnittpunkt mit $\ell(a^\theta, \bar{b}_i^\theta)$ als Instantiation von $\bar{x}_i$. Die endlich vielen von bereits instanzierten Punkten definierten Constraints $\{\ \mathtt{t}\ \}(e_1, e_2 : x_i)$ schließen davon nur endlich viele Richtungen aus, in denen der eindeutig bestimmte Schnittpunkt x_i^θ oder $\bar{x}_i^\theta$ auf $\ell(e_1, e_2)$ zu liegen käme. Entsprechend für Geraden mit negativer Steigung, falls $\beta(x_i) = \mathit{falsch}$.
Die Literalvorkommen-Elemente lassen sich so instanzieren, daß die x-Koordinate von z_{jk} im offenen Intervall $](n{+}3j{+}k{-}1), (n{+}3j{+}k)[$ liegt. Denn durch diese Einschränkung und den Constraint $\{\ \mathtt{sc}\ \}(x, t : z_{jk})$ $(z_{jk} = x \in \mathcal{F})$ bleibt eine Strecke als Menge möglicher Realisierungen für z_{jk}. Alle anderen Constraints sind entweder von der Form $\{\ \mathtt{sf}\ \}(e_1, e_2 : z_{jk})$ oder eine Permutation davon,(genau dann, wenn $e_1^\theta, e_2^\theta \in \ell(x^\theta, t^\theta)$) dann fordert es nach Konstrukti-

a. Grundgerüst, Variablen- und Wahrheitstransfer-Komponenten instanzierbar:



b. Erfüllbarkeits-Test instanzierbar:

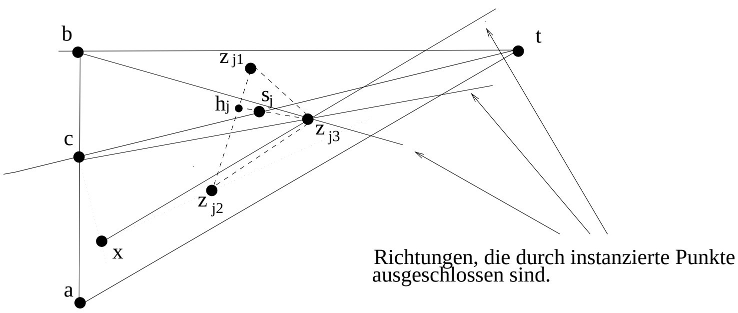


Abbildung 7.19: Die Instanzierung einer erfüllbaren Konstellation. (NP-Härte-Beweis für $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$)

on von $C_{\mathcal{F}}$ genau die Reihenfolge, die durch die Koordinaten-Einschränkung erreicht wird), oder es ist $\{\ \mathfrak{t}\ \}(e_1, e_2 : z_{ij})$ (genau dann, wenn $\ell(e_1^\theta, e_2^\theta) \neq \ell(x^\theta, t^\theta)$), alle diese Constraints zusammen können aber nur endlich viele Punkte ausschließen.
Weil β eine NOT-ALL-EQUAL-3SAT erfüllende Belegung ist, liegen von den je drei Literalvorkommen-Punkten in einer Klausel zwei auf einer Seite der Geraden $\ell(c^\theta, t^\theta)$ und der dritte auf der anderen. Das heißt, daß $\ell(c^\theta, t^\theta)$ das Dreieck $\Delta z_{j1} z_{j2} z_{j3}$ schneidet. Als Instanzierung für s_j und l_j kann man stets mit den bisher instanzierten Elementen konsistente Punkte finden, wieder, weil unter all den Geraden, die durch z_{j3}^θ und das Innere des Dreiecks gehen, nur endlich viele durch die Constraints $\{\ \mathfrak{t}\ \}(e_1, e_2 : h_j)$ und $\{\ \mathfrak{t}\ \}(e_1, e_2 : s_j)$ ausgeschlossen werden können, und nach Konstruktion liegt die x-Koordinate von jedem möglichen Punkt s_j^θ im offenen Intervall $](n+3j), (n+3j+3)[$. Deshalb ist sind die so gefundenen Schnittpunkte von geeigneten Geraden durch z_{j3}^θ mit $\ell(c^\theta, t^\theta)$, konsistent mit den unter ihnen definierten Constraints $\{\ \mathfrak{sf}\ \}(e_1, e_2 : e_3)$ (falls $e_1 \prec e_2 \prec e_3$), wobei $\prec$ die lexikographische Ordnung

$$c \prec s_1 \prec s_2 \ldots \prec s_m \prec t$$

auf der Menge der auf $\ell(c^\theta, t^\theta)$ zu istanzierenden Elemente ist.
Damit ist eine insgesamt konsistente Instanzierung von $C_{\mathcal{F}}$ gefunden.

$\square$(Theorem **??**)

Selbst wenn man auf die Kompositionsvollständigkeit verzichtet, bleiben ausdrucksstarke Kalküle unpraktikabel: Sie sind NP-hart, selbst ihre (erweiterten) Basiskalküle. [30] Nur die (erweiterten) Basiskalküle der einfachsten Kalküle, nämlich des Gleichheitskalküls $\mathfrak{E}q$ und des feinsten Kalküls $\mathfrak{F}$ sind polynomiell entscheidbar, was daran liegt, daß alle Basisrelationen Punktrelationen oder Komplemente von Punktrelationen sind, so daß die ersten zwei Elemente beliebig instanziert werden können und dann die festgelegten Elemente der Reihe nach gemäß einem Constraint instanziert und auf alle ihre anderen $O(n^3)$ Constraints mit instanzierten Elementen hin überprüft werden müssen.
Aber selbst für diese einfachen Kalküle sind ihre Vervollständigungen nach Theorem 145 NP-hart. Die Hoffnung darauf, daß es einen vollständigen polynomiell entscheidbaren Kalkül gibt, beschränkt sich somit auf die vage (verwegene) Hoffnung, daß NP = P ist. Dies legt nahe, für das Schließen in ternären RST-Kalkülen approximative Algorithmen zu verwenden oder sich auf Teilklassen von CSPs zu beschränken. Auf diese speziellen Felder bezogen, können ternäre Kalküle ungeachtet der nun bewiesenen größtenteils entmutigenden formalen Eigenschaften dennoch nützlich sein.

[30] Ich vemute, daß sich mein Beweis für die NP-Härte auf alle beschränkten Erweiterungen $\mathfrak{RC}^{TCI(t)}$ übertragen läßt.

Kapitel 8

Schlußbetrachtungen

8.1 Zusammenfassung

Das Forschungsgebiet der ternären Kalküle zur Beschreibung qualitativen räumlichen Schließens bestand bislang vor allem aus wenigen einzelnen Kalkülen, deren formale Eigenschaften weitgehend unbekannt waren. Diesem Mangel habe ich abgeholfen, indem ich die bestehenden Kalküle auf die Eigenschaften hin untersucht habe, die für das Ableiten neuer Information notwendig sind. Insbesondere habe ich einen einheitlichen Formalismus eingeführt, der leicht auf Kalküle höherer Stelligkeit übertragbar ist, und gezeigt, daß solche Relationenalgebren für beliebige Stelligkeit existieren.

Diese von mir entwickelte formale algebraische Theorie habe ich genutzt, um einge Kalküle zu entwickeln und mit ihren Relationen vorzustellen und die formalen Eigenschaften der vorgestellten Kalküle zu untersuchen. Die Ergbenisse sind in Tabelle 8.1 zusammengefaßt.

Dabei bin ich von Freksas Kalkülen $\mathfrak{SC}$ und $\mathfrak{DC}$ ausgegangen und habe sie weiter verfeinert, und diese Verfeinerungen wieder vergröbert. Mein Ziel war, eine Relationenalgebra oder wenigstens einen vollständigen Kalkül zu finden, der JEPD-Kalkül, permutations- und kompositionsvollständig und ausdrucksmächtig ist. Wenigstens Parallelität sollte ein Kalkül nach Möglichkeit definieren können. Denn für Geometrien über der PL1, und damit in Relationenalgebren, die ja wie in Kapitel 3 erwähnt, Operationen zur Beschreibung aller PL1-Formeln besitzen, sind damit alle unter RST-Abbildungen invarianten geometrischen Relationen definierbar [WS83].
Leider mußte ich erkennen, daß keine Relationenalgebra existiert, die diesen Anforderungen genügt. Wie Tabelle 8.1 und Theorem **??** in Kapitel 5 zeigt, kann kein verwendbarer (endlicher permutations- und kompostionsvollständiger) Kalkül Parallelität definieren. Somit haben meine Untersuchungen erwie-

Kalkül	Größe $\lvert\mathcal{B}(\mathfrak{K})\rvert$	$\lvert R(\mathfrak{K})\rvert$	erschöpfend	perm.- vollständig	komp.- vollständig
$\mathfrak{E}q$	5	32	ja	ja	ja
$\mathfrak{L}$	8	256	ja	ja	ja
$\mathfrak{C}v$	9	512	ja	ja	ja
$\mathfrak{SC}$	8	256	eq, e_{12}, $e_{23} \notin \mathfrak{SC}$	nein	ja
$\mathfrak{DC}$	15	32768	eq, $e_{12} \notin \mathfrak{DC}$	nein	nein
$\mathfrak{RC}$	21	2^{21}	ja	ja	nein
$\mathfrak{K}_{\alpha^o}{}^{TCI}$	–	$\aleph_0$	nein	ja	ja
$\mathfrak{F}$	$2^{\aleph_0}$	$2^{2^{\aleph_0}}$	ja	ja	ja

Kalkül	$\mathcal{P}arallel$ definierbar	$\mathcal{B}^{\top}(\mathfrak{K})$-SAT	$\mathcal{B}(\mathfrak{K})$-SAT
$\mathfrak{E}q$	nein	P	P
$\mathfrak{L}$	nein	NP-hart	NP-hart
$\mathfrak{C}v$	nein	NP-hart	?
$\mathfrak{SC}$	ja	NP-hart	NP-hart
$\mathfrak{DC}$	ja, mit Par	NP-hart	NP-hart
$\mathfrak{RC}$	ja, mit Par	NP-hart	NP-hart
$\mathfrak{K}_{\alpha^o}{}^{TCI}$	ja	Basis existiert nicht	
$\mathfrak{F}$	im vollst. Kalkül ja	P	P

Tabelle 8.1: Überblick über die formalen Eigenschaften der vorgestellten Kalküle

sen, daß bei dreistelligen (und damit auch bei allen k-stelligen Relationenalgebren für $k \geq 3$) die Forderung nach Informationserhalt bei Kompositionen und Permutationen bei den bekannten Kalkülen und allen naheliegenden Varianten nur durch unendliche Verfeinerungen erreicht wird. Nur sehr unanschauliche oder sehr einfache endliche Kalküle, etwa die von mir eingeführten Vergröberungen $\mathfrak{L}$ (Linienkalkül) und $\mathfrak{C}v$ (konvexer Kalkül) sind permutations- und kompositionsvollständig. Auch bei der Untersuchung der Komplexität ternärer Kalküle hat sich herausgestellt, daß alle ternären Relationenalgebren NP- hart sind, und für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{SC}$, $\mathfrak{DC}$, $\mathfrak{RC}$ sind sogar die entsprechenden Basiskalküle NP-hart, sodaß trotz einer vollständig bekannten Wissensbasis keine Aussicht auf polynomielle Algorithmen besteht. Nur die beiden Extreme, $\mathfrak{E}q$ als gröbster Kalkül und $\mathfrak{F}$ als feinster, liegen in P.
Trotzdem ist und bleibt die Betrachtung ternärer Kalküle sinnvoll, weil man durch sie Aussagen treffen kann, die schärfer als die ursprüngliche Wissensbasis, aber garantiert gültig sind.

8.2 Weitere Forschung

Ich möchte noch einige weitere Anmerkungen zu Überlegungen anfügen, bei denen ich bisher noch nichts Veröffentlichungswürdiges beweisen konnte, von denen ich aber glaube, daß die Beschäftigung mit ihnen sinnvoll ist, oder zu denen ich bereits interessante Erkenntnisse gewonnen habe, die ich aus Platzgründen nicht mehr aufgenommen habe.

Zu Kapitel 3:
Auf der theoretischen Seite könnten anschließende Fragestellungen in einer Axiomatisierung der Relationenalgebren bestehen, eventuell durch Ersetzung einzelner der von mir vorgestellten Eigenschaften in der Definition durch andere.

Zu Kapitel 4:
Man kann eine Äquivalenzrelation auf den Kalkülen definieren, wobei Relationen vom gleichen ***Typ*** heißen, wenn sie durch Tranformationsoperationen ineinander überführt werden können. Es bilden also jeweils die Relationenmengen $\{\mathsf{R}, \mathsf{R}^{(12)}, \mathsf{R}^{(23)}, \mathsf{R}^{(13)}, \mathsf{R}^{(231)}, \mathsf{R}^{(321)}\}$ eine Äquivalenzklasse für ternäre Relationen. Die Vereinigung aller Mengen einer Äquivalenzklasse bilden wieder eine RST-Relation. Da transformierte Tripel dann in die gleiche Äquivalenzklasse gehören, es also nicht auf die Position der Punkte in dem Tripel ankommt, heißen diese Relationen ***ungeordnete*** Relationen und Kalküle, die nur aus ungeordneten Relationen bestehen, heißen ***ungeordnete Kalküle*** .
Zu jedem geordneten Kalkül gibt es also einen ungeordneten Kalkül.
Meine bisherigen Ergebnisse haben jedoch gezeigt, daß ungeordnete Kalküle zwar einfachere algebraische Eigenschaften, ansonsten aber weitgehend die gleichen negativen formalen Eigenschaften besitzen wie die geordneten, und da sie zudem weniger ausdrucksmächtig sind, rate ich von einer Beschäftigung mit ihnen ab.

Zu Kapitel 5:
Gilt Theorem 101 auch ohne die Symmetriebedingung? Wenn es ein Gegenbeispiel gibt, dann sind dessen Relationen alle beliebig fein verzahnt. (Dies ist eine Konsequenz aus dem Weglemma.)

Zu Kapitel 6:
Die Unendlichkeit des TCI-Abschlusses der Winkelkalküle hat vermutlich keine gravierenden Auswirkungen auf die Praxis, da jedes CSP endlich ist. Ich vermute, daß es in jedem ternären Kalkül $\mathfrak{K}$ eine Konstante k gibt, so daß $\mathfrak{K}^{TCI(kn)}$ zur vollständigen Beschreibung der Folgerungen eines n-elementigen $\mathfrak{K}$-CSPs ausreicht, das bedeutet, daß bei fortgesetzter Anwendung aller Kompostionen und Permutationen spätestens nach $k \cdot n$ Schritten keine neuen Erkenntnisse mehr gewonnen werden können. Dies würde für die Praxis einen Weg öffnen, tatsächlich alles Wissen einer Wissensbasis ausdrücken zu können.

Zu Kapitel 7:
Ich bin dabei zu untersuchen, ob die vorgestellten NP-harten Kalküle in Wahrheit NP-vollständig sind. Mir scheint, daß wegen der Beschreibbarkeit in der Arithmetik 74 folgende Beweisstruktur gangbar ist, der Beweis bedarf aber noch der Klärung einiger Details:

Das Problem beim Nachweis der NP-Vollständigkeit gliedert sich in zwei Aspekte. Die wesentliche Frage für den Nachweis der NP-Vollständigkeit besteht in der Beantwortung der Frage, ob zu jeder Lösung auch schon eine polynomiell darstellbare Lösung existiert. Eine solche Lösung existiert leider nicht immer in rationalen Zahlen. Daran schließt sich die Frage an, ob polynomiell nachgewiesen werden kann, daß eine gefundene polynomiell darstellbare Instantiation (etwa in algebraischen Zahlen) ein gegebenes $\mathfrak{K}$-SAT-CSP löst.
Für das erste Problem kann ich mit Hilfe der aus dem Abschnitt Definierbarkeit gewonnen Ergebnisse nachweisen, daß es immer eine algebraische Lösung gibt. Ein solches CSP C ist immer permutationskonsistent, das heißt, $Rel_C(a,b,c) = Rel^{\pi}_C(\bar{\pi}(a,b,c))$ für alle Tripel und alle Permutationen π. Entscheidend dabei ist, daß jedes CSP äquivalent zu einem System aus quadratischen Gleichungen und Ungleichungen ist. Die Einschränkungen durch Ungleichungen definieren für jeden Punkt eine offene Region. Ich fasse dazu alle Elemente zu Komponenten zusammen, wobei zwei Elemente in der gleichen Komponente sind, wenn sie gemeinsam in einer Gleichung auftreten, also wenn ihre Elemente in einem Constraint mit einer nicht offenen Relation vorkommen. In der gleichen Komponente sind dann auch Elemente, die nicht gemeinsam in einer Gleichung stehen, aber für die es eine Kette von Elementen gibt, sodaß jeweils aufeinanderfolgende Elemente diese Eigenschaft haben.
Wegen der RST-Invarianz kann ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, mindestens zwei Elemente einer Komponente seien rational. Wenn die Constraints einen Punkt exakt festlegen, dann einen dieser Komponente, denn alle anderen Punkte können nur bis auf eine offene Menge definiert werden. Denn der Schnitt der endlich vielen durch Constraints bestimmten offenen Mengen ist offen. Ich konnte nun zeigen, daß alle festgelegten Punkte einer Komponente mit zwei rationalen Punkten algebraisch sind.
Induktiv zeige ich für die nächsten Komponenten, daß sie mit den instanzierten Komponenten konsistent und durch algebraische Punkte darstellbar sind. Nach Annahme ist jede Komponente für sich konsistent instanziert. Ich betrachte nun die Darstellungen der Koordinaten der Punkte als Linearkombination über einer $\mathbb{Q}$-Basis für $\mathbb{R}$. Dann kann ich durch eine geeignete Basistransformation wegen der Endlichkeit des CSP immer erreichen, daß alle Punkte in algebraische Punkte übergehen, die die gleichen Polynomgleichungen erfüllen, und die so nahe bei den ursprünglichen Punkten liegen, daß sie alle Ungleichungen nach wie vor erfüllen.[Puc]
Da allein durch die Angabe des Minimalpolynoms P_a einer algebraischen Zahl

a noch nicht festgelegt ist, welche der Nullstellen von P_a sie darstellt, muß für eine Darstellung der Lösung eine zusätzliche Beschreibung hinzukommen, etwa ein Intervall I_a mit rationalen Grenzen, in dem sie liegt. Aufgrund von Gleichverteilungssätzen für Lösungsmengen [Rem92b] ist es vermutlich tatsächlich möglich, eine Lösung zu finden, für die diese Grenze polynomiell in der Gröse des CSP angegeben werden kann.
Für den Nachweis, daß es sich dabei tatsächlich um eine Lösung handelt, müssen die Werte A, B, Γ, Ω aus Abschnitt 4.2.1 berechnet werden. Dies ist widerum für algebraische Zahlen a, b nicht so trivial wie für die rationalen Zahlen, aber bei geeigneter Wahl der Intervalle I_a polynomiell durchführbar. Dazu benötige ich Sätze aus der Funktionentheorie, Algebra und Numerik, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

Dieser Beweisgang muß nun noch genauer untersucht werden, vor allem hinsichtlich der Möglichkeit, die Intervalle I_a so klein zu wählen, daß der Nachweis, daß es die gewählten Werte sind, die das Polynom lösen, polynomiell ist.

Wie soll man mit der NP-Vollständigkeit umgehen?

Es gibt durchaus polynomielle approximative Algorithmen, die schwache (also korrekte, aber nicht vollständige) Kompositionen und Permutationen, wie sie in $\mathfrak{SC}$, $\mathfrak{DC}$, $\mathfrak{RC}$ vorkommen, für Ableitungen nutzen, und die dadurch in vielen Fällen Inkonsistenzen feststellen. Algorithmen, die in $O(n^4)$ terminieren, wobei n die Anzahl der Elemente ist, finden in der Praxis in vielen CSPs die schärfstmöglichen Forderungen, auch bei nicht kompositions- und permutationsvollständigen Kalkülen.
Es gibt lokale Konsistenzeigenschaften, die in polynomieller Zeit überprüft oder gar erwungen werden können, Ich habe Variationen der von Mackworth, Peter van Beek und Robert Cohen vorgestellten polynomiellen Algorithmen [vBC90] entwickelt, mit denen man in $O(n^k)$ Zeit k-Konsistenz erzwingen kann, wobei n die Anzahl der Elemente des CSP ist. Dennoch sind dies in der Regel nur notwendige Kriterien und ich konnte – im Gegensatz zu den Ergebnissen für binäre Kalküle – für alle ternären Kalküle inklusive $\mathcal{B}(\mathfrak{C}v\ )$ Beispiele nichttrivialer CSPs finden, die diese lokalen Konsistenzen erfüllen, aber global inkonsistent sind. [1] Als nächstes ist zu untersuchen, ob die Anzahl der Gegenbeispiele, bei denen lokale Konsistenzeigenschaften gelten, obwohl das CSP global inkonsistent ist, endlich ist oder ob sie zumindest in polynomieller Zeit überprüfbar sind. Da sich daraus die Möglichkeit polynomieller Algorithmen für $\mathfrak{K}$-SAT ergäbe, wäre das unter den vorgestellten Kalkülen nur beim konvexen Basiskalkül zu erwarten, weil die anderen Kalküle von mir als NP-vollständig nachgewiesen wurden. Leider steht zu vermuten, daß diese

[1] Diese Ergebnisse habe ich aus Platzgründen nicht in diese Arbeit aufnehmen können.

Schranke für $\mathcal{B}(\mathfrak{C}v)$ in der Größenordnung $O(n^7)$ ist, da ich den folgenden Satz nachweisen konnte:

Satz 167 (k-Konsistenzsatz) *:*
In $\mathcal{B}(\mathfrak{C}v)$ gilt: Strenge k-Konsistenz impliziert strenge n-Konsistenz für alle $n \geq k$, genau dann wenn $k \geq 7$

wobei strenge k-Konsistenz die von Mackworth [Mac77] und Freuder [Fre91] eingeführte lokale Konsistenzeigenschaft für CSPs ist [MF85, DvB97]. Wegen der Existenz der oben angesprochenen Gegenbeispiele ist damit die Frage: „Ist der Basiskalkül $\mathcal{B}(\mathfrak{C}v) \in \mathsf{P}$?“ aber noch nicht abschließend geklärt.

Selbst für die Kalküle, für die solch polynomielle Algorithmen nicht existieren, (etwa die Relationenalgebren, außerdem $\mathcal{B}(\mathfrak{RC})$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{L})$) können praktische , heuristische Untersuchungen mit geeigneten Bewertungskriterien zusätzliche Klarheit schaffen, ob bei einem genügend hohen Prozentsatz der Beispiele die approximativen Algorithmen scharfe Schlüsse ziehen, und bewerten, wie grob die Verallgemeinerungen durch Unvollständigkeiten sind. Solche Untersuchungen hängen naturgemäß stark von der Auswahl der Beispiele ab, und machen daher vor allem im Hinblick auf konkrete Anforderungen Sinn.

8.3 Schlußwort

Insgesamt zeigt meine Arbeit, daß ternäre Kalküle wesentlich komplexer als binäre sind, und Schlüsse in anschaulichen ternären Kalkülen nicht so scharf wie möglich sind, wenn man mindestens Parallelität oder einen Winkel ausdrücken können will. Das Ziel, einen rst-Kalkül zu finden, der handhabbar und ausssagekräftig ist, bleibt somit ein unerfüllbarer Traum.
Die Zukunft wird zeigen, ob das Ziel, das menschliche Schließen insgesamt perfekt zu automatisieren, erfüllbar sein wird oder nicht – diese Aufgabe ist jedoch nicht nur NP-hart; das ist eine wirklich harte Aufgabe.

Herzliche Worte des Dankes

Ich danke allen Leuten, auch den hier nicht explizit erwähnten, die mir bei meiner Diplomarbeit seelisch, inhaltlich wie auch tatkräftig geholfen haben, aber auch dem Thema meiner Diplomarbeit selbst, dafür, daß es mich oft so gefesselt hat. Ich danke Smirkowski-Cabellan für seine Nichtexistenz.

Ich danke allen kleinen und großen Glücksfällen, die mir die Zeit der Diplomarbeit versüßt haben, insbesondere Sebastian für die Zeit, in der er mir allein durch seine Existenz und sein Interesse seelisch Kraft gegeben hat, und als Dauer-Glück meinen WG-Mitbewohnern Isolde, Immi und Berni, die gleiches geleistet haben. Für das Korrekturlesen danke ich neben Isolde, Immi und Berni vor allem Ilia und Hans. Für Ratschläge zur Formulierung und inhaltliche Anmerkungen danke ich Jan-Christoph Puchta und Immi. Ich möchte mich auch bei der Gemeinde der Forscher in verwandten Gebieten in aller Welt für die raschen Antworten auf Fragen per Internet und ihre Hilfsbereitschaft bedanken, allen voran Ian Hodkinson und Reinhard Moratz.
Einen speziellen Dank möchte ich an Berni als Latex-Spezialist aussprechen, der für mich beim Kampf mit dem Programm oft die letzte Rettung war.
Der größte Dank geht an meine beiden Betreuer, Professor Bernhard Nebel und Hans-Dieter Ebbinghaus, die stets für mich Zeit hatten, für ihre Ratschläge, Fragen und Anregungen, in welche Richtung ich weiter forschen könnte. Vielen Dank auch, daß Sie sich die Mühe machten, nun so viel durchzulesen. Ich sah leider keine weiteren Kürzungsmöglichkeiten ohne wesentliche Ergebnisse zu verlieren, wesentliche Lücken im Aufbau oder in den Beweisen zu riskieren, Einbußen beim Verständnis in Kauf nehmen zu müssen oder den Charakter der Arbeit als Überblick über die Theorie ternärer RST-Kalküle aufzugeben.

Anhang A

Notationen, Index und Literaturhinweise

Allgemeine Notationen:

$]x, y[$	$= \{z \mid x < z < y\}$	offenes Intervall zwischen x und y
$[x, y[$	$= \{z \mid x \leq z < y\}$	halboffenes Intervall von x bis vor y
$]x, y]$	$= \{z \mid x < z \leq y\}$	halboffenes Intervall von hinter x bis y
$[x, y]$	$= \{z \mid x \leq z \leq y\}$	abgeschlossenes Intervall von x bis y
$\mathfrak{P}(M)$		Potenzmenge von M
$dist(a, b)$		Abstand der Punkte a und b voneinander
$\ell(a, b)$		Gerade durch die Punkte a und b
$[a, b]$		Strecke von a bis b
$\ell[a, b)$		Halbgerade von a durch b
$\measuredangle abc$		Winkel mit Schenkeln $\ell[b, a)$ und $\ell[b, c)$
$\Delta(a, b, c) = \Delta abc$		Dreieck mit Eckpunkten a, b, c
$\lfloor \alpha \rfloor$		Der von α auf volle 90^o abgerundete Winkel
$\lceil \alpha \rceil$		Der von α auf volle 90^o aufgerundete Winkel
a^θ		Element a, instanziert durch θ
		(in meinen Instantiationen also ein Punkt in $\mathbb{R}^2$)
$s_\kappa(q)(p_1, \ldots, p_n)$		Substitution des κ-ten Elements im Tupel durch q
$= (p_1, \ldots, p_{\kappa-1}, q, p_{\kappa+1} \ldots, p_n)$		
R, S, T		üblicherweise Relationen.
$Reg\mathsf{R}$, $Reg\mathsf{S}$	$= R, = S$ *etc.*	üblicherweise die zugehörigen Regionen
$\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$		üblicherweise Kalküle.
$Rel_{\mathfrak{K}}(a, b, c)$	$= Rel_{\mathfrak{K}}(a, b : c)$	Die Relation des Tripels (a, b, c) im Kalkül $\mathfrak{K}$
Eq^k, $\mathfrak{E}q^{\ k}$		k-stelliger Gleichheitskalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
SC , $\mathfrak{SC}$		Einzelkreuzkalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
DC , $\mathfrak{DC}$		Doppelkreuzkalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
RC , $\mathfrak{RC}$		verfeinerter Doppelkreuzkalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
Cv , $\mathfrak{C}v$		Einfachkreuzkalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
L , $\mathfrak{L}$		Linienkalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
K_{α^o}, $\mathfrak{K}_{\alpha^o}$		Winkelkalkül (Kalkül bzw. Kalkülmodell)
$\mathcal{B}(\mathfrak{K})$		Basiskalkül von $\mathfrak{K}$
$\mathcal{B}^\top(\mathfrak{K})$		erweiterter Basiskalkül von $\mathfrak{K}$
$(\mathfrak{K})^\cup$		Vervollständigung von $\mathfrak{K}$
$\mathfrak{K}^{\ M}$		Abschluß von $\mathfrak{K}$ unter den Operationen in M
$\mathfrak{K}^{\ TCI}$		TCI-Abschluß von $\mathfrak{K}$ (vgl. Abschnitt **??**)

Kapitelspezifische Notationen

Aus Kapitel 3:

$r^{\smile}$		Konversionsoperation (bei zweistelligen Kalkülen)
M^C		Komplement der Menge M
$R \rhd_\kappa S$,	$R\ {}_\kappa\!\lhd S$	unsymmetrische lose Komposition
$R\ {}_\kappa\!\bowtie_\lambda S$		symmetrische lose Komposition
$R\ {}_\kappa\!\diamond_\lambda S$		steife Komposition
$\Cap(R, S, T)$	$= (R \circ S) \cap T$	Die Operation im Basiskalkül
$c_\kappa(R)$		Zylindrifikation von R nach Koordinate (Position) κ
$d_{\kappa\lambda}$		Diagonalrelation
$\top$		universelle Relation
$\{eq\}$		Gleichheitsrelation
$e_{\kappa\lambda}$		selektive Gleichheitsrelation

Aus Kapitel 5:

$\bar{z}$	$= Re(z) - Im(z)$	komplex konjugierter Wert
$\bar{R}$	$= \{z \mid \bar{z} \in Reg(R)\}$	symmetrische Relation
$\mathfrak{K} \Rrightarrow \mathfrak{L}$		$\mathfrak{K}$ ist feiner als $\mathfrak{L}$ (Definition 29)
$\mathfrak{K} \Lleftarrow \mathfrak{L}$		$\mathfrak{K}$ ist gröber als $\mathfrak{L}$ (Definition 29)
$\mathfrak{K} \overset{e}{\Rrightarrow} \mathfrak{L}$		$\mathfrak{K}$ ist endlich feiner als $\mathfrak{L}$ (Definition29)
$\mathfrak{K} \overset{\neq}{\Rrightarrow} \mathfrak{L}$		$\mathfrak{K}$ ist echt feiner als $\mathfrak{L}$ (Definition 29)
$\mathfrak{K} \overset{e}{\Lleftarrow} \mathfrak{L}$		$\mathfrak{K}$ ist endlich gröber als $\mathfrak{L}$ (Definition29)
$\mathfrak{K} \overset{\neq}{\Lleftarrow} \mathfrak{L}$		$\mathfrak{K}$ ist echt gröber als $\mathfrak{L}$ (Definition 29)
$R \looparrowright S$		Menge R erfordert S
$R \gtrdot S$		Die Relationenmenge R definiert S(Definition 34)

Aus Kapitel 6:

$\kappa_i(a)$		i-te Koordinate des Punktes a
$\Delta_i(a,b)$	$= \kappa_i(b) - \kappa_i(a)$	Differenz der i-ten Koordinaten der Punkte a, b
$\sigma(a,b)$	$= \frac{\Delta_2(a,b)}{\Delta_1(a,b)}$	Steigung der Gerade $\ell(a,b)$
$e_1 =_o e_2$		Element e_1 liegt so weit oben wie Element e_2
$e_1 \prec_o e_2$		Element e_1 liegt unterhalb Element e_2
$e_1 \preceq_o e_2$		Element e_1 liegt nicht oberhalb von Element e_2
$e_1 =_r e_2$		Element e_1 liegt so weit rechts wie Element e_2
$e_1 \prec_r e_2$		Element e_1 liegt links von Element e_2
$e_1 \preceq_r e_2$		Element e_1 liegt nicht rechts von Element e_2
$e_1 =_t e_2$		Elemente e_1, e_2 sind in der gleichen Transferkomponente
$t_1 \prec_t t_2$		Transferelement t_1 kommt vor t_2 in der Hierarchie
$t_1 \preceq_t t_2$		Transferelement $t_1 \prec_t t_2$ oder $t_1 =_t e_2$

Index

x $\Rrightarrow$, 38
$\mathbf{A}_2$ - Standardrelation, 134

ableitbar, 14
Ableitungsregel, 14
Abschlus, 51
Abschnittslemma, 137
absteigendes Paar, 176
angle α at location, 104
angle α at pivot element, 104
anschaulich, 108
Aquidistanzlemma, 140
atomar, 27
aufsteigendes Paar, 176
ausdrucksstark, 45
Aussagen, 14

Basis, 21
Basisrelationen, 9, 10, 21
Belegung, 19
beschreibbar, 49
Beschreibbarkeit, 88
Betragslemma, 139

circular angle α, 104

definierbar, 44
Diagonalisierung $\mathfrak{a}_{\kappa\lambda}$, 58
Diagonalisierung $\mathfrak{a}_{\kappa\lambda}$, 59
disjunkt erzeugbar, 26

echt feiner, 38
echt grober, 38
Eichkorollar, 83
Eichung, 80
Einzelkomponente, 165
Einzelkreuzkalkul, 48
Elemente, 18
enthalten, 82
erfordert, 122
erhalten bleiben, 46
erreicht, 19

feiner-gleich, 38
firstop-Elemente, 63
Formeln, 19
funktionale Einheit, 165
funktionale Menge, 165

Gleichheitskalkul, 15
Gleichmachtigkeitssatz, 148
grober-gleich, 38

informationserhaltend, 32
informationsgleich, 31
Inkonsistenzregel, 25
Instantiation, 18, 19
instanziert, 18
Interpretation, 15
invariant, 47
Invarianzen, 90, 93, 96, 99
Invarianzkriterium, 48

JEPD-Basis, 26

Kalkul, 13
komplex, 21
Komponenten, 19
komponieren, 10
Komposition, 57, 62
Kompositionssatz, 95
Konstantensymbol, 13
Konstellation, 18
konstruieren, 40

Konversion, 15, 57
Konvertierungssatz, 67
konzeptionell benachbart, 73
Koordinatenlemma, 140
korrekt, 31
Korrektheit, 20

Linienlemma, 126
Link-Elemente, 63
lose Komposition, 63

Midpoint, 83
Modell, 15
Modellkomponente, 165
Modellkomponenten, 19

offener Keil, 171, 178
Operandenrelationen, 14
Operatoren, 14
ordnungskorrekt, 196
Orientierungswert, 87

permutationsvollstandig, 51
Position, 23
Projektionslemma, 138
Punktrelation, 83

Realisation, 19
realisiert, 19
Referenzelement, pivot element,, 23
Referenzrichtung, 8
Region, 82
Relation, 15, 18
Relationen, 84
Relationenalgebra, 57, 65
Relationssymbol, 14
relative Lokalisation, 9
relative spatial treatment, 9
rotationssymmetrisch, 113
RST-Abbildung, 47
RST-Relation, 47

SatzArith, 132
Schnittregel, 15, 25
schwache Definition, 31
secondop-Elemente, 63
Seitenlemma, 136
Senkrechte, 167
Standpunkt, 8
Startelement, start element, 22
steife Komposition, 63
steife Kompositionen, 64
Substitution, 59
Symmetrielemma, 127
symmetrisch, 108
symmetrische lose Kompositionen, 63

Transformationssatz, 91
transformierte Relation, 11
trennende Relation, 74
Typ, 86, 222

ungeordnete, 222
unsymmetrische lose Kompositionen, 63

Variablen, 13
Verfeinerung, 38
verwendbar, 108
voller Kalkul, 18
vollstandig, 52
Vollstandigkeitseigenschaften, 88, 100

Winkeladditionslemma, 123
Winkelhalbierungslemma, 132

Zielelement, goal element, 23
Zielobjekt, 8
zusammengesetzt, 21
zusammengesetzte Relationen, 10
Zylindrifikation c_κ, 59
Zylindrifikation c_κ, 58
Zylindrifikationen, 58
zylindrische Algebra, 59
zylindrische Algebren, 58

Literaturverzeichnis

[All83] J. F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Comm. Ass. Comp. Mach.*, 26(11):832–843, 1983.

[And97] H Andréka. Complexity of equations valid in algebras of relations, Part I: Strong non–finitizability. *Annals of Pure and Applied Logic*, 89:149–209, 1997.

[Bar95] Michael F. Barnsley. *Theorie und Praxis der deterministischen Geometrie*. Spektrum, Akad. Verlag, Heidelberg, 1995.

[BCFdC99] Philippe Balbiani, Jean-Franois Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In *IJCAI-99*, pages 442–447, 1999.

[BS81] S Burris and H P Sankappanavar. *A course in universal algebra*, volume 78 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[DvB97] Rina Dechter and Peter van Beek. Local and global relational consistency. *Theoretical Computer Science*, 173:283–308, 1997.

[EFT96] Hans-Dieter Ebbinghaus, Jrg Flum, and Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. Spektrum Verlag, 1996.

[Ege91] Max J. Egenhofer. Reasoning about binary topological relations. In *Proceedings of the Second Symposium on Large Spatial Databases, SSD '91*, pages 143–160, Berlin, 19991. Springer.

[Fra91] Andrew Frank. Qualitative spatial reasoning with cardinal directions. In *Proc. Seventh Austrian Conference on Artificial Intelligence, Wien*, pages 157–167, Berlin, 1991. Springer.

[Fre91] E.C. Freuder. Synthesizing constraint expressions. *Comm. ACM*, 21:958–966, 1991.

[Fre92] Christian Freksa. Using orientation information for qualitative spatial reasoning. In A. U. Frank, I Campari, and U. Formentini, editors, *Theories and Methods of Spatio-Temporal Reasoning in Geographic Space*. Springer, New York, 1992.

[Grä79] G Grätzer. *Universal algebra*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1979.

[Gue89] H. Guesgen. Spatial reasoning based on allen's temporal logic. Technical Report TR-89-049, ICSI, Berekely, CA, 1989.

[Hal62] P Halmos. *Algebraic Logic*. Chelsea Publising Co., New York, 1962.

[IC98] Amar Isli and Anthony G. Cohn. An algebra for cyclic ordering of 2d orientation. In *Proceedings of AAAI-98*, pages 643–649, Anaheim, CA, 1998. AAAI Press/The MIT PRESS.

[IH00] Hajnal Andreka und andere Ian Hodkinson, R. Hirsch. Kommunikation per e-mail, 2000.

[IM99] Amar Isli and Reinhard Moratz. Qualitative spatial representation and reasoning: Algebraic models for relative position. submitted to Elsevier Preprint, 1999.

[LHT71] J. Donald Monk Leon Henkin and Alfred Tarski. *Cylindric Algebras, Part I*. North Holland, Amsterdam, 1971.

[Lig91] Gérard Ligozat. On generalized interval calculi. In *Proceedings of AAAI-90*, pages 234–240, Anaheim, CA, 1991. AAAI Press/The MIT PRESS.

[Lig98] Gerard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 9(1):23–44, 1998.

[Mac77] A. K. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence*, 8:99–118, 1977.

[Mad91] R. D. Maddux. *Introductory Course on Relation Algebras, Finite-dimensional Cylindric Algebras, and Their Interconnections*, page 639. North-Holland Publishing Company, Amsterdam – Oxford – New York, 1991.

[MBV89] Peter G. van Beek Marc B. Vilain, Henry A. Kautz. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning: A revised report. In D. S. Weld and J. de Kleer, editors, *Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems*, Lecture Notes in Computer sciences, pages 373–381. Morgan Kaufmann, San Franciso, CA, 1989.

[MF85] A. K. Mackworth and E.C. Freuder. The complexity of some polynomial network consistency algorithms for constraint satisfaction problems. *Artificial Intelligence*, 25:65–74, 1985.

[Mon74] Ugo Montanari. Networks of constraints: Fundamental properties and applications to picture processing. *Inform. Sci.*, 7:95–132, 1974.

[MRG79] David S. Johnson Michael R. Garey. *Computers and Intractabbility – A Guide to the Threory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, New York, 1979.

[NB95] Bernhard Nebel and Hans-Jürgen Bürckert. Reasoning about temporal relaitons: A maximal tractable subclass of alen's interval algebra. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 42(1):43–66, 1995.

[PL93] Alexander Reinefeld Peter Ladkin. A symbolic approach to interval constraint problems. In J. A. Campbell J. Calmert, editor, *Artificial Intelligence and Symbolic Mathematical Computing*, volume 737 of *Lecture Notes in Computer sciences*, pages 65–84. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[PL94] Roger Maddux Peter Ladkin. On binary constraint problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 41(3):435–469, 1994.

[Puc] Jan-Christoph Puchta. persönliche kommunikation.

[Rem92a] R. Remmert. *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Rem92b] R. Remmert. *Funktionentheorie 2*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ren92] James Renegar. On the computational complexity and geometry of the first order theory of the reals. part i – iii. *Journal of Symbolioc Computation*, 13(3):255–300, 301–328, 329–352, 1992.

[Ren98] Jochen Renz. Maximal tractable fragments of the Region Connection Calculus: A complete analysis. *Artificial Inteligence*, 1998.

[RN99] Jochen Renz and Bernhard Nebel. On the complexity of qualitative spatial reasoning: A maximal tractable fragment of the Region Connection Calculus. *Artificial Intelligence*, 108(1–2):69–123, 1999.

[Sci99] Alexander Scivos. Wahrscheinlichkeitsbasierte ansätze zur selbstlokalisation. Seminararbeit an der Universität Freiburg, 1999.

[Tar41] Alfred Tarski. On thecalculus of relations. *Journal of Symbolic Logic*, 6:73–89, 1941.

[Tar77] Alfred Tarski, editor. *Einfhrung in die mathematische Logik*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977.

[tD91] Tammo tom Dieck, editor. *Topologie*. De Gruyter, Berlin, New York, 1991.

[vBC90] Peter van Beek and Robin Cohen. Exact and approximate reasoning about temporal relations. *Comput. Intelligence*, 6:132–144, 1990.

[WS83] Alfred Tarski Wolfram Schwabhäuser, Wanda Szmielew, editor. *Metamathematische Methoden in der Geometrie*. Springer, Berlin, 1983.

[ZF93] Kai Zimmermann and Christian Freksa. Qualitatives räumliches Schließen mit Wissen über Richtungen, Entfernungen und Pfade. *Künstliche Intelligenz*, 7(4):21–28, 1993.

Anhang B

Dateien: Die Kompositionstabellen

Als Tabellen für die Operatoren will ich vor allem noch die Kompositionstabellen anfügen, da sie in den meisten Algorithmen Verwendung finden, und die Begriffe wie kompositionsvollständigkeit eine wichtige Rolle spielen. Wegen der Eigenschaft (RA6) und wegen des Konvertierungssatzes 58, Punkt 2., genügt es, eine Kompositionstabelle anzugeben, da die übrigen mit wenig Aufwand mit Hilfe der Transformationsoperationen abgeleitet werden können. Für $\mathfrak{RC}$ gebe ich dennoch zwei Kompositionen an, da sie in Beispiel **??** benötigt werden. Die Permutatiostabellen sind für fast alle Kalküle im Text an der Stelle dargestellt, an der der Kalkül vorgestellt wird. Da alle Kalküle dieser Arbeit vollständige JEPD-Kalküle sind, sind die Relationen Schnitt und Vereinigung direkt ablesbar, und die übrigen Operatoren, etwa für die Zylindrifikation ist sehr leicht zu gewinnen (vgl. dazu Beispiel 11 in Abschnitt).

:

Permutation: ID (Identität) Bez. bei [ZF93]: (ID)	INV (Inverse) (INV)	REV (Reverse) (HMI)	CONV (Konverse) (SC)	ROT Rotierte (HM)	TOR Torsion (SCI)
$(x, y : z)$	$(y, x : z)$	$(z, y : x)$	$(x, z : y)$	$(y, z : x)$	$(z, x : y)$
{lf}	{rb}	{rf}	{irc}	{lb}	{ilc}
{sf}	{sb}	{sf}	{sc}	{sb}	{sc}
{rf}	{lb}	{lf}	{ilc}	{rb}	{irc}
{lp}	{rl}	{rp}	{rc}	{ll}	{lc}
{e_{23}}	{e_{13}}	{e_{12}}	{e_{23}}	{e_{12}}	{e_{13}}
{rp}	{ll}	{lp}	{olc}	{rl}	{orc}
{elc}	{erc}	{erc}	{erc}	{elc}	elc
{olc}	{orc}	{ rl}	{ rp}	{lp}	{ll}
{ilc}	{irc}	{ irc}	{ rf}	{ lf}	{ lb}
{sc}	{sc}	{sb}	{sf}	{sf} (0/4)	{sb}
{irc}	{ilc}	{lb} }	{lf}	{rf}	{ irc}
{orc}	{olc}	{ll}	{lp}	{rp}	{orc}
{erc}	{elc}	{elc}	{elc}	{erc}	erc
{ll}	{rp}	{rc}	{rl}	{olc}	{lp}
{e_{13}}	{e_{23}}	{e_{13}}	{e_{12}}	{e_{23}}	{e_{12}}
{rl}	{lp}	{olc}	{ll}	{rc}	{rp}
{lb}	{rp}	{irc}	{rb}	{ilc}	{lp}
{sb}	{sf}	{sc}	{sb}	{sc}	{sf}
{rb}	{lf}	{ilc}	{lb}	{irc}	{rf}

Tabelle B.1: Tabelle zur Veranschaulichung der Permutationen des verfeinerten Kalküls RC

B.1 Die Komposition ${}_3\diamond_2$ in $\mathfrak{RC}$

File stc32rc.tex, created by program compout.pas vom 16.1.2000

Read from file cmp32rc.kmp

$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ e_{12} = \emptyset$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ lf = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ sf = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ rf = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ lp = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ e_{23} = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ rp = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ elc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ olc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ ilc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ sc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ irc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ orc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ erc = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ ll = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ eq = \{ eq \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ rl = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ lb = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ sb = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ rb = \{ e_{12} \}$
$e_{12}\ {}_3\diamond_2\ eq = \emptyset$

$lf\ {}_3\diamond_2\ e_{12} = \emptyset$
$lf\ {}_3\diamond_2\ lf = \{ lf, lp, elc, ll, lb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ sf = \{ lf \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ rf = \{ lf, sf, rf \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ lp = \{ lf, lp, elc, ll, lb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ e_{23} = \{ lf \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ rp = \{ lf, sf, rf \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ elc = \{ lf, lp, elc, ll, lb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ olc = \{ lf, lp, elc, ll, lb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ ilc = \{ lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ sc = \{ lf, lp, elc, olc, ilc \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ irc = \{ lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ orc = \{ lf, sf, rf, rp, irc, orc, erc \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ erc = \{ lf, sf, rf, rp, irc, orc, erc \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ ll = \{ lb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ eq = \{ eq \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ rl = \{ rf, rp, irc, orc, erc \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ lb = \{ lb, sb, rb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ sb = \{ rb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ rb = \{ rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb \}$
$lf\ {}_3\diamond_2\ eq = \emptyset$

$sf\ {}_3\diamond_2\ e_{12} = \emptyset$
$sf\ {}_3\diamond_2\ lf = \{ lf \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ sf = \{ sf \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ rf = \{ rf \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ lp = \{ lf \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ e_{23} = \{ sf \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ rp = \{ rf \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ elc = \{ lf, lp, elc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ olc = \{ lf, lp, elc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ ilc = \{ lf, lp, elc, olc, ilc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ sc = \{ sf, e_{23}, sc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ irc = \{ rf, rp, irc, orc, erc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ orc = \{ rf, rp, erc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ erc = \{ rf, rp, erc \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ ll = \{ ll \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ eq = \{ eq \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ rl = \{ rl \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ lb = \{ lb \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ sb = \{ sb \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ rb = \{ rb \}$
$sf\ {}_3\diamond_2\ eq = \emptyset$

$rf\ {}_3\diamond_2\ e_{12} = \emptyset$
$rf\ {}_3\diamond_2\ lf = \{ lf, sf, rf \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ sf = \{ rf \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ rf = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ lp = \{ lf, sf, rf \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ e_{23} = \{ rf \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ rp = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ elc = \{ lf, sf, rf, lp, elc, olc, ilc \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ olc = \{ lf, sf, rf, lp, elc, olc, ilc \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ ilc = \{ lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ sc = \{ rf, rp, irc, orc, erc \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ irc = \{ rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ orc = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ erc = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ ll = \{ lf, lp, elc, olc, ilc \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ eq = \{ eq \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ rl = \{ rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ lb = \{ lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ sb = \{ lb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ rb = \{ lb, sb, rb \}$
$rf\ {}_3\diamond_2\ eq = \emptyset$

$lp\ {}_3\diamond_2\ e_{12} = \emptyset$

lp $_3\diamond_2$ lf = { lf, lp, elc, ll, lb }
lp $_3\diamond_2$ sf = { lf }
lp $_3\diamond_2$ rf = { lf, sf, rf }
lp $_3\diamond_2$ lp = { elc, ll, lb }
lp $_3\diamond_2$ e_{23} = { lp }
lp $_3\diamond_2$ rp = { lf, sf, rf }
lp $_3\diamond_2$ elc = { elc, ll, lb }
lp $_3\diamond_2$ olc = { elc, ll, lb }
lp $_3\diamond_2$ ilc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
lp $_3\diamond_2$ sc = { elc, olc, ilc }
lp $_3\diamond_2$ irc = { lf, lp, elc, olc, ilc, sc, irc }
lp $_3\diamond_2$ orc = { lf, e_{23}, irc }
lp $_3\diamond_2$ erc = { lf, sf, rf, rp, irc, orc, erc }
lp $_3\diamond_2$ ll = { lb }
lp $_3\diamond_2$ eq = { eq }
lp $_3\diamond_2$ rl = { rf, rp, irc, orc, erc }
lp $_3\diamond_2$ lb = { lb, sb, rb }
lp $_3\diamond_2$ sb = { rb }
lp $_3\diamond_2$ rb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
lp $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

e_{23} $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
e_{23} $_3\diamond_2$ lf = { lf }
e_{23} $_3\diamond_2$ sf = { sf }
e_{23} $_3\diamond_2$ rf = { rf }
e_{23} $_3\diamond_2$ lp = { lp }
e_{23} $_3\diamond_2$ e_{23} = { e_{23} }
e_{23} $_3\diamond_2$ rp = { rp }
e_{23} $_3\diamond_2$ elc = { elc }
e_{23} $_3\diamond_2$ olc = { olc }
e_{23} $_3\diamond_2$ ilc = { ilc }
e_{23} $_3\diamond_2$ sc = { sc }
e_{23} $_3\diamond_2$ irc = { irc }
e_{23} $_3\diamond_2$ orc = { orc }
e_{23} $_3\diamond_2$ erc = { erc }
e_{23} $_3\diamond_2$ ll = { ll }
e_{23} $_3\diamond_2$ eq = { eq }
e_{23} $_3\diamond_2$ rl = { rl }
e_{23} $_3\diamond_2$ lb = { lb }
e_{23} $_3\diamond_2$ sb = { sb }
e_{23} $_3\diamond_2$ rb = { rb }
e_{23} $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

rp $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
rp $_3\diamond_2$ lf = { lf, sf, rf }
rp $_3\diamond_2$ sf = { rf }
rp $_3\diamond_2$ rf = { rf, rp, erc, rl, rb }
rp $_3\diamond_2$ lp = { lf, sf, rf }
rp $_3\diamond_2$ e_{23} = { rp }
rp $_3\diamond_2$ rp = { erc, rl, rb }
rp $_3\diamond_2$ elc = { lf, sf, rf, lp, elc, olc, ilc }
rp $_3\diamond_2$ olc = { rf, e_{23}, ilc }
rp $_3\diamond_2$ ilc = { rf, rp, ilc, sc, irc, orc, erc }
rp $_3\diamond_2$ sc = { irc, orc, erc }
rp $_3\diamond_2$ irc = { irc, orc, erc, rl, rb }
rp $_3\diamond_2$ orc = { erc, rl, rb }
rp $_3\diamond_2$ erc = { erc, rl, rb }
rp $_3\diamond_2$ ll = { lf, lp, elc, olc, ilc }
rp $_3\diamond_2$ eq = { eq }
rp $_3\diamond_2$ rl = { rb }
rp $_3\diamond_2$ lb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
rp $_3\diamond_2$ sb = { lb }
rp $_3\diamond_2$ rb = { lb, sb, rb }
rp $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

elc $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
elc $_3\diamond_2$ lf = { lf, lp, elc, ll, lb }
elc $_3\diamond_2$ sf = { lf, lp, elc }
elc $_3\diamond_2$ rf = { lf, sf, rf, lp, elc, olc, ilc }
elc $_3\diamond_2$ lp = { elc, ll, lb }
elc $_3\diamond_2$ e_{23} = { elc }
elc $_3\diamond_2$ rp = { lf, sf, rf, lp, elc, olc, ilc }
elc $_3\diamond_2$ elc = { elc, ll, lb }
elc $_3\diamond_2$ olc = { elc, ll, lb }
elc $_3\diamond_2$ ilc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
elc $_3\diamond_2$ sc = { elc, olc, ilc }
elc $_3\diamond_2$ irc = { lf, lp, elc, olc, ilc, sc, irc }
elc $_3\diamond_2$ orc = { lf, lp, elc, olc, ilc, sc, irc }
elc $_3\diamond_2$ erc = { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc }
elc $_3\diamond_2$ ll = { lb }
elc $_3\diamond_2$ eq = { eq }
elc $_3\diamond_2$ rl = { rf, rp, irc, orc, erc }
elc $_3\diamond_2$ lb = { lb, sb, rb }
elc $_3\diamond_2$ sb = { rb }
elc $_3\diamond_2$ rb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
elc $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

olc $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
olc $_3\diamond_2$ lf = { lf, lp, elc, ll, lb }
olc $_3\diamond_2$ sf = { lf, lp, elc }
olc $_3\diamond_2$ rf = { lf, sf, rf, lp, elc, olc, ilc }
olc $_3\diamond_2$ lp = { elc, ll, lb }
olc $_3\diamond_2$ e_{23} = { olc }
olc $_3\diamond_2$ rp = { rf, e_{23}, ilc }

olc $_3\diamond_2$ elc = { elc, ll, lb }
olc $_3\diamond_2$ olc = { elc, ll, lb }
olc $_3\diamond_2$ ilc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
olc $_3\diamond_2$ sc = { ilc }
olc $_3\diamond_2$ irc = { ilc, sc, irc }
olc $_3\diamond_2$ orc = { ilc, sc, irc }
olc $_3\diamond_2$ erc = { rf, rp, ilc, sc, irc, orc, erc }
olc $_3\diamond_2$ ll = { lb }
olc $_3\diamond_2$ eq = { eq }
olc $_3\diamond_2$ rl = { rf, rp, irc, orc, erc }
olc $_3\diamond_2$ lb = { lb, sb, rb }
olc $_3\diamond_2$ sb = { rb }
olc $_3\diamond_2$ rb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
olc $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

ilc $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
ilc $_3\diamond_2$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_3\diamond_2$ sf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ilc $_3\diamond_2$ rf = { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc }
ilc $_3\diamond_2$ lp = { elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_3\diamond_2$ e_{23} = { ilc }
ilc $_3\diamond_2$ rp = { rf, rp, ilc, sc, irc, orc, erc }
ilc $_3\diamond_2$ elc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_3\diamond_2$ olc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_3\diamond_2$ ilc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_3\diamond_2$ sc = { ilc }
ilc $_3\diamond_2$ irc = { ilc, sc, irc }
ilc $_3\diamond_2$ orc = { ilc, sc, irc }
ilc $_3\diamond_2$ erc = { rf, rp, ilc, sc, irc, orc, erc }
ilc $_3\diamond_2$ ll = { lb }
ilc $_3\diamond_2$ eq = { eq }
ilc $_3\diamond_2$ rl = { rf, rp, irc, orc, erc }
ilc $_3\diamond_2$ lb = { lb, sb, rb }
ilc $_3\diamond_2$ sb = { rb }
ilc $_3\diamond_2$ rb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
ilc $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

sc $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
sc $_3\diamond_2$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
sc $_3\diamond_2$ sf = { sf, e_{23}, sc }
sc $_3\diamond_2$ rf = { rf, rp, irc, orc, erc }
sc $_3\diamond_2$ lp = { elc, olc, ilc }
sc $_3\diamond_2$ e_{23} = { sc }
sc $_3\diamond_2$ rp = { irc, orc, erc }
sc $_3\diamond_2$ elc = { elc, olc, ilc }
sc $_3\diamond_2$ olc = { ilc }
sc $_3\diamond_2$ ilc = { ilc }
sc $_3\diamond_2$ sc = { sc }
sc $_3\diamond_2$ irc = { irc }
sc $_3\diamond_2$ orc = { irc }
sc $_3\diamond_2$ erc = { irc, orc, erc }
sc $_3\diamond_2$ ll = { ll }
sc $_3\diamond_2$ eq = { eq }
sc $_3\diamond_2$ rl = { rl }
sc $_3\diamond_2$ lb = { lb }
sc $_3\diamond_2$ sb = { sb }
sc $_3\diamond_2$ rb = { rb }
sc $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

irc $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
irc $_3\diamond_2$ lf = { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc }
irc $_3\diamond_2$ sf = { rf, rp, irc, orc, erc }
irc $_3\diamond_2$ rf = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_3\diamond_2$ lp = { lf, lp, elc, olc, ilc, sc, irc }
irc $_3\diamond_2$ e_{23} = { irc }
irc $_3\diamond_2$ rp = { irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_3\diamond_2$ elc = { lf, lp, elc, olc, ilc, sc, irc }
irc $_3\diamond_2$ olc = { ilc, sc, irc }
irc $_3\diamond_2$ ilc = { ilc, sc, irc }
irc $_3\diamond_2$ sc = { irc }
irc $_3\diamond_2$ irc = { irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_3\diamond_2$ orc = { irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_3\diamond_2$ erc = { irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_3\diamond_2$ ll = { lf, lp, elc, olc, ilc }
irc $_3\diamond_2$ eq = { eq }
irc $_3\diamond_2$ rl = { rb }
irc $_3\diamond_2$ lb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
irc $_3\diamond_2$ sb = { lb }
irc $_3\diamond_2$ rb = { lb, sb, rb }
irc $_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

orc $_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
orc $_3\diamond_2$ lf = { lf, sf, rf, rp, irc, orc, erc }
orc $_3\diamond_2$ sf = { rf, rp, erc }
orc $_3\diamond_2$ rf = { rf, rp, erc, rl, rb }
orc $_3\diamond_2$ lp = { lf, e_{23}, irc }
orc $_3\diamond_2$ e_{23} = { orc }
orc $_3\diamond_2$ rp = { erc, rl, rb }
orc $_3\diamond_2$ elc = { lf, lp, elc, olc, ilc, sc, irc }
orc $_3\diamond_2$ olc = { ilc, sc, irc }

orc ${}_3\diamond_2$ ilc = { ilc, sc, irc }
orc ${}_3\diamond_2$ sc = { irc }
orc ${}_3\diamond_2$ irc = { irc, orc, erc, rl, rb }
orc ${}_3\diamond_2$ orc = { erc, rl, rb }
orc ${}_3\diamond_2$ erc = { erc, rl, rb }
orc ${}_3\diamond_2$ ll = { lf, lp, elc, olc, ilc }
orc ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }
orc ${}_3\diamond_2$ rl = { rb }
orc ${}_3\diamond_2$ lb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
orc ${}_3\diamond_2$ sb = { lb }
orc ${}_3\diamond_2$ rb = { lb, sb, rb }
orc ${}_3\diamond_2$ eq = ∅

erc ${}_3\diamond_2$ e_{12}= ∅
erc ${}_3\diamond_2$ lf = { lf, sf, rf, rp, irc, orc, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ sf = { rf, rp, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ rf = { rf, rp, erc, rl, rb }
erc ${}_3\diamond_2$ lp = { lf, sf, rf, rp, irc, orc, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ e_{23} = { erc }
erc ${}_3\diamond_2$ rp = { erc, rl, rb }
erc ${}_3\diamond_2$ elc = { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ olc = { rf, rp, ilc, sc, irc, orc, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ ilc = { rf, rp, ilc, sc, irc, orc, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ sc = { irc, orc, erc }
erc ${}_3\diamond_2$ irc = { irc, orc, erc, rl, rb }
erc ${}_3\diamond_2$ orc = { erc, rl, rb }
erc ${}_3\diamond_2$ erc = { erc, rl, rb }
erc ${}_3\diamond_2$ ll = { lf, lp, elc, olc, ilc }
erc ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }
erc ${}_3\diamond_2$ rl = { rb }
erc ${}_3\diamond_2$ lb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
erc ${}_3\diamond_2$ sb = { lb }
erc ${}_3\diamond_2$ rb = { lb, sb, rb }
erc ${}_3\diamond_2$ eq = ∅

ll ${}_3\diamond_2$ e_{12}= ∅
ll ${}_3\diamond_2$ lf = { lb }
ll ${}_3\diamond_2$ sf = { ll }
ll ${}_3\diamond_2$ rf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ll ${}_3\diamond_2$ lp = { lb }
ll ${}_3\diamond_2$ e_{23} = { ll }
ll ${}_3\diamond_2$ rp = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ll ${}_3\diamond_2$ elc = { lb }
ll ${}_3\diamond_2$ olc = { lb }
ll ${}_3\diamond_2$ ilc = { lb }
ll ${}_3\diamond_2$ sc = { ll }
ll ${}_3\diamond_2$ irc = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ll ${}_3\diamond_2$ orc = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ll ${}_3\diamond_2$ erc = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ll ${}_3\diamond_2$ ll = { sb }
ll ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }
ll ${}_3\diamond_2$ rl = { sf, e_{23}, sc }
ll ${}_3\diamond_2$ lb = { rb }
ll ${}_3\diamond_2$ sb = { rl }
ll ${}_3\diamond_2$ rb = { rf, rp, irc, orc, erc }
ll ${}_3\diamond_2$ eq = ∅

eq ${}_3\diamond_2$ e_{12}= { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
eq ${}_3\diamond_2$ lf = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ sf = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ rf = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ lp = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ e_{23} = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ rp = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ elc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ olc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ ilc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ sc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ irc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ orc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ erc = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ ll = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ eq = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ rl = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ lb = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ sb = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ rb = ∅
eq ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }

rl ${}_3\diamond_2$ e_{12}= ∅
rl ${}_3\diamond_2$ lf = { rf, rp, irc, orc, erc }
rl ${}_3\diamond_2$ sf = { rl }
rl ${}_3\diamond_2$ rf = { rb }
rl ${}_3\diamond_2$ lp = { rf, rp, irc, orc, erc }
rl ${}_3\diamond_2$ e_{23} = { rl }
rl ${}_3\diamond_2$ rp = { rb }
rl ${}_3\diamond_2$ elc = { rf, rp, irc, orc, erc }
rl ${}_3\diamond_2$ olc = { rf, rp, irc, orc, erc }
rl ${}_3\diamond_2$ ilc = { rf, rp, irc, orc, erc }
rl ${}_3\diamond_2$ sc = { rl }
rl ${}_3\diamond_2$ irc = { rb }
rl ${}_3\diamond_2$ orc = { rb }
rl ${}_3\diamond_2$ erc = { rb }
rl ${}_3\diamond_2$ ll = { sf, e_{23}, sc }
rl ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }

rl ${}_3\diamond_2$ rl = { sb }
rl ${}_3\diamond_2$ lb = { lf, lp, elc, olc, ilc }
rl ${}_3\diamond_2$ sb = { ll }
rl ${}_3\diamond_2$ rb = { lb }
rl ${}_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

lb ${}_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
lb ${}_3\diamond_2$ lf = { lb, sb, rb }
lb ${}_3\diamond_2$ sf = { lb }
lb ${}_3\diamond_2$ rf = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_3\diamond_2$ lp = { lb, sb, rb }
lb ${}_3\diamond_2$ e_{23} = { lb }
lb ${}_3\diamond_2$ rp = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_3\diamond_2$ elc = { lb, sb, rb }
lb ${}_3\diamond_2$ olc = { lb, sb, rb }
lb ${}_3\diamond_2$ ilc = { lb, sb, rb }
lb ${}_3\diamond_2$ sc = { lb }
lb ${}_3\diamond_2$ irc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_3\diamond_2$ orc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_3\diamond_2$ erc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_3\diamond_2$ ll = { rb }
lb ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }
lb ${}_3\diamond_2$ rl = { lf, lp, elc, olc, ilc }
lb ${}_3\diamond_2$ lb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
lb ${}_3\diamond_2$ sb = { rf, rp, irc, orc, erc }
lb ${}_3\diamond_2$ rb = { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc }
lb ${}_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

sb ${}_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
sb ${}_3\diamond_2$ lf = { rb }
sb ${}_3\diamond_2$ sf = { sb }
sb ${}_3\diamond_2$ rf = { lb }
sb ${}_3\diamond_2$ lp = { rb }
sb ${}_3\diamond_2$ e_{23} = { sb }
sb ${}_3\diamond_2$ rp = { lb }
sb ${}_3\diamond_2$ elc = { rb }
sb ${}_3\diamond_2$ olc = { rb }
sb ${}_3\diamond_2$ ilc = { rb }
sb ${}_3\diamond_2$ sc = { sb }
sb ${}_3\diamond_2$ irc = { lb }
sb ${}_3\diamond_2$ orc = { lb }
sb ${}_3\diamond_2$ erc = { lb }
sb ${}_3\diamond_2$ ll = { rl }
sb ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }
sb ${}_3\diamond_2$ rl = { ll }
sb ${}_3\diamond_2$ lb = { rf, rp, irc, orc, erc }
sb ${}_3\diamond_2$ sb = { sf, e_{23}, sc }
sb ${}_3\diamond_2$ rb = { lf, lp, elc, olc, ilc }
sb ${}_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

rb ${}_3\diamond_2$ e_{12}= $\emptyset$
rb ${}_3\diamond_2$ lf = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ sf = { rb }
rb ${}_3\diamond_2$ rf = { lb, sb, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ lp = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ e_{23} = { rb }
rb ${}_3\diamond_2$ rp = { lb, sb, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ elc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ olc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ ilc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ sc = { rb }
rb ${}_3\diamond_2$ irc = { lb, sb, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ orc = { lb, sb, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ erc = { lb, sb, rb }
rb ${}_3\diamond_2$ ll = { rf, rp, irc, orc, erc }
rb ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }
rb ${}_3\diamond_2$ rl = { lb }
rb ${}_3\diamond_2$ lb = { lf, sf, rf, lp, e_{23}, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc }
rb ${}_3\diamond_2$ sb = { lf, lp, elc, olc, ilc }
rb ${}_3\diamond_2$ rb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
rb ${}_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$

eq ${}_3\diamond_2$ e_{12}= { e_{12}}
eq ${}_3\diamond_2$ lf = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ sf = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ rf = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ lp = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ e_{23} = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ rp = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ elc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ olc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ ilc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ sc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ irc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ orc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ erc = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ ll = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ eq = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ rl = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ lb = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ sb = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ rb = $\emptyset$
eq ${}_3\diamond_2$ eq = { eq }

File stc21rc.txt, created by program compout.pas
vom 16.1.2000

Read from file cmp21rc.kmp

e_{12} ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { e_{12}}
e_{12} ${}_2\diamond_1$ lf = { lf }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ sf = { sf }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ rf = { rf }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ lp = { lp }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ rp = { rp }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ elc = { elc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ olc = { olc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ sc = { sc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ irc = { irc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ orc = { orc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ erc = { erc }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ ll = { ll }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ eq = {}
e_{12} ${}_2\diamond_1$ rl = { rl }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ lb = { lb }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ sb = { sb }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ rb = { rb }
e_{12} ${}_2\diamond_1$ eq = {}

lf ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { lf }
lf ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
lf ${}_2\diamond_1$ sf = { lf }
lf ${}_2\diamond_1$ rf = { lf, sf, rf }
lf ${}_2\diamond_1$ lp = { lf, lp, elc, olc, ilc }
lf ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
lf ${}_2\diamond_1$ rp = { lf, sf, rf }
lf ${}_2\diamond_1$ elc = { lf, lp, elc, olc, ilc }
lf ${}_2\diamond_1$ olc = { ilc }
lf ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc, sc, irc }
lf ${}_2\diamond_1$ sc = { irc }
lf ${}_2\diamond_1$ irc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb
}
lf ${}_2\diamond_1$ orc = { rf, rp, erc, rl, rb }
lf ${}_2\diamond_1$ erc = { lf, sf, rf, rp, erc, rl, rb }
lf ${}_2\diamond_1$ ll = { lf, lp, elc, olc, ilc }
lf ${}_2\diamond_1$ eq = {}
lf ${}_2\diamond_1$ rl = { lf, sf, rf, rp, erc, rl, rb }
lf ${}_2\diamond_1$ lb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lf ${}_2\diamond_1$ sb = { lf, lp, elc, ll, lb }
lf ${}_2\diamond_1$ rb = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc,
ll, rl, lb, sb, rb }
lf ${}_2\diamond_1$ eq = {}

sf ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { sf }
sf ${}_2\diamond_1$ lf = { lf }
sf ${}_2\diamond_1$ sf = { sf }
sf ${}_2\diamond_1$ rf = { rf }
sf ${}_2\diamond_1$ lp = { lf }
sf ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
sf ${}_2\diamond_1$ rp = { rf }
sf ${}_2\diamond_1$ elc = { lf, lp, elc }
sf ${}_2\diamond_1$ olc = { olc }
sf ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc }
sf ${}_2\diamond_1$ sc = { sc }
sf ${}_2\diamond_1$ irc = { irc }
sf ${}_2\diamond_1$ orc = { orc }
sf ${}_2\diamond_1$ erc = { rf, rp, erc }
sf ${}_2\diamond_1$ ll = { lf, lp, elc }
sf ${}_2\diamond_1$ eq = {}
sf ${}_2\diamond_1$ rl = { rf, rp, erc }
sf ${}_2\diamond_1$ lb = { lf, lp, elc, ll, lb }
sf ${}_2\diamond_1$ sb = { e_{12}, sf, sb }
sf ${}_2\diamond_1$ rb = { rf, rp, erc, rl, rb }
sf ${}_2\diamond_1$ eq = {}

rf ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { rf }
rf ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, sf, rf }
rf ${}_2\diamond_1$ sf = { rf }
rf ${}_2\diamond_1$ rf = { rf, rp, irc, orc, erc }
rf ${}_2\diamond_1$ lp = { lf, sf, rf }
rf ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
rf ${}_2\diamond_1$ rp = { rf, rp, irc, orc, erc }
rf ${}_2\diamond_1$ elc = { lf, sf, rf, lp, elc, ll, lb }
rf ${}_2\diamond_1$ olc = { lf, lp, elc, ll, lb }
rf ${}_2\diamond_1$ ilc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
rf ${}_2\diamond_1$ sc = { ilc }
rf ${}_2\diamond_1$ irc = { ilc, sc, irc }
rf ${}_2\diamond_1$ orc = { irc }
rf ${}_2\diamond_1$ erc = { rf, rp, irc, orc, erc }
rf ${}_2\diamond_1$ ll = { lf, sf, rf, lp, elc, ll, lb }
rf ${}_2\diamond_1$ eq = {}
rf ${}_2\diamond_1$ rl = { rf, rp, irc, orc, erc }
rf ${}_2\diamond_1$ lb = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc,
ll, rl, lb, sb, rb }
rf ${}_2\diamond_1$ sb = { rf, rp, erc, rl, rb }
rf ${}_2\diamond_1$ rb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb
}
rf ${}_2\diamond_1$ eq = {}

lp ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { lp }
lp ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
lp ${}_2\diamond_1$ sf = { lf }
lp ${}_2\diamond_1$ rf = { lf, sf, rf }
lp ${}_2\diamond_1$ lp = { elc, olc, ilc }
lp ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }

lp ${}_2\diamond_1$ rp = { lf, sf, rf }
lp ${}_2\diamond_1$ elc = { elc, olc, ilc }
lp ${}_2\diamond_1$ olc = { ilc }
lp ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc, sc, irc }
lp ${}_2\diamond_1$ sc = { irc }
lp ${}_2\diamond_1$ irc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
lp ${}_2\diamond_1$ orc = { rf, rp, erc, rl, rb }
lp ${}_2\diamond_1$ erc = { lf, sf, rf, rp, erc, rl, rb }
lp ${}_2\diamond_1$ ll = { elc, olc, ilc }
lp ${}_2\diamond_1$ eq = {}
lp ${}_2\diamond_1$ rl = { e_{12}, lf, rb }
lp ${}_2\diamond_1$ lb = { elc, olc, ilc, ll, lb }
lp ${}_2\diamond_1$ sb = { elc, ll, lb }
lp ${}_2\diamond_1$ rb = { lf, lp, elc, ll, lb, sb, rb }
lp ${}_2\diamond_1$ eq = {}

e_{23} ${}_2\diamond_1$ e_{12}= {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ lf = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ sf = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ rf = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ lp = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ e_{23} = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ rp = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ elc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ olc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ ilc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ sc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ irc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ orc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ erc = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ ll = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ eq = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, olc, ilc, sc, irc, orc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
e_{23} ${}_2\diamond_1$ rl = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ lb = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ sb = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ rb = {}
e_{23} ${}_2\diamond_1$ eq = { e_{23} }

rp ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { rp }
rp ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, sf, rf }
rp ${}_2\diamond_1$ sf = { rf }
rp ${}_2\diamond_1$ rf = { rf, rp, irc, orc, erc }
rp ${}_2\diamond_1$ lp = { lf, sf, rf }
rp ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
rp ${}_2\diamond_1$ rp = { irc, orc, erc }
rp ${}_2\diamond_1$ elc = { lf, sf, rf, lp, elc, ll, lb }
rp ${}_2\diamond_1$ olc = { lf, lp, elc, ll, lb }
rp ${}_2\diamond_1$ ilc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
rp ${}_2\diamond_1$ sc = { ilc }
rp ${}_2\diamond_1$ irc = { ilc, sc, irc }
rp ${}_2\diamond_1$ orc = { irc }
rp ${}_2\diamond_1$ erc = { irc, orc, erc }
rp ${}_2\diamond_1$ ll = { e_{12}, rf, lb }
rp ${}_2\diamond_1$ eq = {}
rp ${}_2\diamond_1$ rl = { irc, orc, erc }
rp ${}_2\diamond_1$ lb = { rf, rp, erc, rl, lb, sb, rb }
rp ${}_2\diamond_1$ sb = { erc, rl, rb }
rp ${}_2\diamond_1$ rb = { irc, orc, erc, rl, rb }
rp ${}_2\diamond_1$ eq = {}

elc ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { elc }
elc ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
elc ${}_2\diamond_1$ sf = { lf, lp, elc }
elc ${}_2\diamond_1$ rf = { lf, sf, rf, lp, elc, ll, lb }
elc ${}_2\diamond_1$ lp = { elc, olc, ilc }
elc ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
elc ${}_2\diamond_1$ rp = { lf, sf, rf, lp, elc, ll, lb }
elc ${}_2\diamond_1$ elc = { elc, olc, ilc }
elc ${}_2\diamond_1$ olc = { ilc }
elc ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc, sc, irc }
elc ${}_2\diamond_1$ sc = { irc }
elc ${}_2\diamond_1$ irc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
elc ${}_2\diamond_1$ orc = { rf, rp, erc, rl, rb }
elc ${}_2\diamond_1$ erc = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
elc ${}_2\diamond_1$ ll = { elc, olc, ilc }
elc ${}_2\diamond_1$ eq = {}
elc ${}_2\diamond_1$ rl = { lf, lp, elc, ll, lb, sb, rb }
elc ${}_2\diamond_1$ lb = { elc, olc, ilc, ll, lb }
elc ${}_2\diamond_1$ sb = { elc, ll, lb }
elc ${}_2\diamond_1$ rb = { lf, lp, elc, ll, lb, sb, rb }
elc ${}_2\diamond_1$ eq = {}

olc ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { olc }
olc ${}_2\diamond_1$ lf = { ilc }
olc ${}_2\diamond_1$ sf = { olc }
olc ${}_2\diamond_1$ rf = { lf, lp, elc, ll, lb }
olc ${}_2\diamond_1$ lp = { ilc }
olc ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
olc ${}_2\diamond_1$ rp = { lf, lp, elc, ll, lb }
olc ${}_2\diamond_1$ elc = { ilc }
olc ${}_2\diamond_1$ olc = { sc }
olc ${}_2\diamond_1$ ilc = { irc }
olc ${}_2\diamond_1$ sc = { orc }
olc ${}_2\diamond_1$ irc = { rf, rp, erc, rl, rb }
olc ${}_2\diamond_1$ orc = { e_{12}, sf, sb }
olc ${}_2\diamond_1$ erc = { lf, lp, elc, ll, lb }
olc ${}_2\diamond_1$ ll = { ilc }

olc $_2\diamond_1$ eq = {}
olc $_2\diamond_1$ rl = { lf, lp, elc, ll, lb }
olc $_2\diamond_1$ lb = { ilc }
olc $_2\diamond_1$ sb = { olc }
olc $_2\diamond_1$ rb = { lf, lp, elc, ll, lb }
olc $_2\diamond_1$ eq = {}

ilc $_2\diamond_1$ e_{12}= { ilc }
ilc $_2\diamond_1$ lf = { ilc, sc, irc }
ilc $_2\diamond_1$ sf = { ilc }
ilc $_2\diamond_1$ rf = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_2\diamond_1$ lp = { ilc, sc, irc }
ilc $_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
ilc $_2\diamond_1$ rp = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_2\diamond_1$ elc = { ilc, sc, irc }
ilc $_2\diamond_1$ olc = { irc }
ilc $_2\diamond_1$ ilc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
ilc $_2\diamond_1$ sc = { rf, rp, erc, rl, rb }
ilc $_2\diamond_1$ irc = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
ilc $_2\diamond_1$ orc = { lf, lp, elc, ll, lb }
ilc $_2\diamond_1$ erc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_2\diamond_1$ ll = { ilc, sc, irc }
ilc $_2\diamond_1$ eq = {}
ilc $_2\diamond_1$ rl = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_2\diamond_1$ lb = { ilc, sc, irc }
ilc $_2\diamond_1$ sb = { ilc }
ilc $_2\diamond_1$ rb = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
ilc $_2\diamond_1$ eq = {}

sc $_2\diamond_1$ e_{12}= { sc }
sc $_2\diamond_1$ lf = { irc }
sc $_2\diamond_1$ sf = { sc }
sc $_2\diamond_1$ rf = { ilc }
sc $_2\diamond_1$ lp = { irc }
sc $_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
sc $_2\diamond_1$ rp = { ilc }
sc $_2\diamond_1$ elc = { irc }
sc $_2\diamond_1$ olc = { orc }
sc $_2\diamond_1$ ilc = { rf, rp, erc, rl, rb }
sc $_2\diamond_1$ sc = { e_{12}, sf, sb }
sc $_2\diamond_1$ irc = { lf, lp, elc, ll, lb }
sc $_2\diamond_1$ orc = { olc }
sc $_2\diamond_1$ erc = { ilc }
sc $_2\diamond_1$ ll = { irc }
sc $_2\diamond_1$ eq = {}
sc $_2\diamond_1$ rl = { ilc }
sc $_2\diamond_1$ lb = { irc }
sc $_2\diamond_1$ sb = { sc }
sc $_2\diamond_1$ rb = { ilc }
sc $_2\diamond_1$ eq = {}

irc $_2\diamond_1$ e_{12}= { irc }
irc $_2\diamond_1$ lf = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_2\diamond_1$ sf = { irc }
irc $_2\diamond_1$ rf = { ilc, sc, irc }
irc $_2\diamond_1$ lp = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
irc $_2\diamond_1$ rp = { ilc, sc, irc }
irc $_2\diamond_1$ elc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_2\diamond_1$ olc = { rf, rp, erc, rl, rb }
irc $_2\diamond_1$ ilc = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
irc $_2\diamond_1$ sc = { lf, lp, elc, ll, lb }
irc $_2\diamond_1$ irc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
irc $_2\diamond_1$ orc = { ilc }
irc $_2\diamond_1$ erc = { ilc, sc, irc }
irc $_2\diamond_1$ ll = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_2\diamond_1$ eq = {}
irc $_2\diamond_1$ rl = { ilc, sc, irc }
irc $_2\diamond_1$ lb = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
irc $_2\diamond_1$ sb = { irc }
irc $_2\diamond_1$ rb = { ilc, sc, irc }
irc $_2\diamond_1$ eq = {}

orc $_2\diamond_1$ e_{12}= { orc }
orc $_2\diamond_1$ lf = { rf, rp, erc, rl, rb }
orc $_2\diamond_1$ sf = { orc }
orc $_2\diamond_1$ rf = { irc }
orc $_2\diamond_1$ lp = { rf, rp, erc, rl, rb }
orc $_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
orc $_2\diamond_1$ rp = { irc }
orc $_2\diamond_1$ elc = { rf, rp, erc, rl, rb }
orc $_2\diamond_1$ olc = { e_{12}, sf, sb }
orc $_2\diamond_1$ ilc = { lf, lp, elc, ll, lb }
orc $_2\diamond_1$ sc = { olc }
orc $_2\diamond_1$ irc = { ilc }
orc $_2\diamond_1$ orc = { sc }
orc $_2\diamond_1$ erc = { irc }
orc $_2\diamond_1$ ll = { rf, rp, erc, rl, rb }
orc $_2\diamond_1$ eq = {}
orc $_2\diamond_1$ rl = { irc }
orc $_2\diamond_1$ lb = { rf, rp, erc, rl, rb }
orc $_2\diamond_1$ sb = { orc }
orc $_2\diamond_1$ rb = { irc }
orc $_2\diamond_1$ eq = {}

erc ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { erc }
erc ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, sf, rf, rp, erc, rl, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ sf = { rf, rp, erc }
erc ${}_2\diamond_1$ rf = { rf, rp, irc, orc, erc }
erc ${}_2\diamond_1$ lp = { lf, sf, rf, rp, erc, rl, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
erc ${}_2\diamond_1$ rp = { irc, orc, erc }
erc ${}_2\diamond_1$ elc = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ olc = { lf, lp, elc, ll, lb }
erc ${}_2\diamond_1$ ilc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
erc ${}_2\diamond_1$ sc = { ilc }
erc ${}_2\diamond_1$ irc = { ilc, sc, irc }
erc ${}_2\diamond_1$ orc = { irc }
erc ${}_2\diamond_1$ erc = { irc, orc, erc }
erc ${}_2\diamond_1$ ll = { rf, rp, erc, rl, lb, sb, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ eq = {}
erc ${}_2\diamond_1$ rl = { irc, orc, erc }
erc ${}_2\diamond_1$ lb = { rf, rp, erc, rl, lb, sb, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ sb = { erc, rl, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ rb = { irc, orc, erc, rl, rb }
erc ${}_2\diamond_1$ eq = {}

ll ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { ll }
ll ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc }
ll ${}_2\diamond_1$ sf = { lf, lp, elc }
ll ${}_2\diamond_1$ rf = { lf, sf, rf, lp, elc, ll, lb }
ll ${}_2\diamond_1$ lp = { elc, olc, ilc }
ll ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
ll ${}_2\diamond_1$ rp = { e_{12}, rf, lb }
ll ${}_2\diamond_1$ elc = { elc, olc, ilc }
ll ${}_2\diamond_1$ olc = { ilc }
ll ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc, sc, irc }
ll ${}_2\diamond_1$ sc = { irc }
ll ${}_2\diamond_1$ irc = { rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb }
ll ${}_2\diamond_1$ orc = { rf, rp, erc, rl, rb }
ll ${}_2\diamond_1$ erc = { rf, rp, erc, rl, lb, sb, rb }
ll ${}_2\diamond_1$ ll = { elc, olc, ilc }
ll ${}_2\diamond_1$ eq = {}
ll ${}_2\diamond_1$ rl = { lb, sb, rb }
ll ${}_2\diamond_1$ lb = { elc, olc, ilc, ll, lb }
ll ${}_2\diamond_1$ sb = { lb }
ll ${}_2\diamond_1$ rb = { lb, sb, rb }
ll ${}_2\diamond_1$ eq = {}

eq ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ lf = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ sf = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ rf = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ lp = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ rp = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ elc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ olc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ ilc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ sc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ irc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ orc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ erc = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ ll = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ eq = {}
eq ${}_2\diamond_1$ rl = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ lb = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ sb = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ rb = { eq }
eq ${}_2\diamond_1$ eq = {}

rl ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { rl }
rl ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, sf, rf, rp, erc, rl, rb }
rl ${}_2\diamond_1$ sf = { rf, rp, erc }
rl ${}_2\diamond_1$ rf = { rf, rp, irc, orc, erc }
rl ${}_2\diamond_1$ lp = { e_{12}, lf, rb }
rl ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
rl ${}_2\diamond_1$ rp = { irc, orc, erc }
rl ${}_2\diamond_1$ elc = { lf, lp, elc, ll, lb, sb, rb }
rl ${}_2\diamond_1$ olc = { lf, lp, elc, ll, lb }
rl ${}_2\diamond_1$ ilc = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
rl ${}_2\diamond_1$ sc = { ilc }
rl ${}_2\diamond_1$ irc = { ilc, sc, irc }
rl ${}_2\diamond_1$ orc = { irc }
rl ${}_2\diamond_1$ erc = { irc, orc, erc }
rl ${}_2\diamond_1$ ll = { lb, sb, rb }
rl ${}_2\diamond_1$ eq = {}
rl ${}_2\diamond_1$ rl = { irc, orc, erc }
rl ${}_2\diamond_1$ lb = { lb, sb, rb }
rl ${}_2\diamond_1$ sb = { rb }
rl ${}_2\diamond_1$ rb = { irc, orc, erc, rl, rb }
rl ${}_2\diamond_1$ eq = {}

lb ${}_2\diamond_1$ e_{12}= { lb }
lb ${}_2\diamond_1$ lf = { lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_2\diamond_1$ sf = { lf, lp, elc, ll, lb }
lb ${}_2\diamond_1$ rf = { e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc, ll, rl, lb, sb, rb }
lb ${}_2\diamond_1$ lp = { elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_2\diamond_1$ e_{23} = { e_{23} }
lb ${}_2\diamond_1$ rp = { rf, rp, erc, rl, lb, sb, rb }
lb ${}_2\diamond_1$ elc = { elc, olc, ilc, ll, lb }
lb ${}_2\diamond_1$ olc = { ilc }
lb ${}_2\diamond_1$ ilc = { ilc, sc, irc }

$lb\ {}_2\diamond_1\ sc = \{ irc \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ irc = \{ rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ orc = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ erc = \{ rf, rp, erc, rl, lb, sb, rb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ ll = \{ elc, olc, ilc, ll, lb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ eq = \{\}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ rl = \{ lb, sb, rb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ lb = \{ elc, olc, ilc, ll, lb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ sb = \{ lb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ rb = \{ lb, sb, rb \}$
$lb\ {}_2\diamond_1\ eq = \{\}$

$sb\ {}_2\diamond_1\ e_{12} = \{ sb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ lf = \{ lf, lp, elc, ll, lb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ sf = \{ e_{12}, sf, sb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ rf = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ lp = \{ elc, ll, lb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ e_{23} = \{ e_{23} \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ rp = \{ erc, rl, rb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ elc = \{ elc, ll, lb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ olc = \{ olc \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ ilc = \{ ilc \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ sc = \{ sc \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ irc = \{ irc \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ orc = \{ orc \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ erc = \{ erc, rl, rb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ ll = \{ lb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ eq = \{\}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ rl = \{ rb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ lb = \{ lb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ sb = \{ sb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ rb = \{ rb \}$
$sb\ {}_2\diamond_1\ eq = \{\}$

$rb\ {}_2\diamond_1\ e_{12} = \{ rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ lf = \{ e_{12}, lf, sf, rf, lp, rp, elc, erc, ll, rl, lb, sb, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ sf = \{ rf, rp, erc, rl, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ rf = \{ rf, rp, irc, orc, erc, rl, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ lp = \{ lf, lp, elc, ll, lb, sb, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ e_{23} = \{ e_{23} \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ rp = \{ irc, orc, erc, rl, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ elc = \{ lf, lp, elc, ll, lb, sb, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ olc = \{ lf, lp, elc, ll, lb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ ilc = \{ lf, lp, elc, olc, ilc, ll, lb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ sc = \{ ilc \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ irc = \{ ilc, sc, irc \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ orc = \{ irc \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ erc = \{ irc, orc, erc, rl, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ ll = \{ lb, sb, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ eq = \{\}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ rl = \{ irc, orc, erc, rl, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ lb = \{ lb, sb, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ sb = \{ rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ rb = \{ irc, orc, erc, rl, rb \}$
$rb\ {}_2\diamond_1\ eq = \{\}$

$eq\ {}_2\diamond_1\ e_{12} = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ lf = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ sf = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ rf = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ lp = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ e_{23} = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ rp = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ elc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ olc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ ilc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ sc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ irc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ orc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ erc = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ ll = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ eq = \{ eq \}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ rl = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ lb = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ sb = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ rb = \{\}$
$eq\ {}_2\diamond_1\ eq = \{ eq \}$

.

B.2 Die Komposition ${}_3\diamond_2$ in $\mathfrak{C}v$

File stc32cv.tex, created by program compout.pas vom 16.1.2000

Read from file cmp32cv.kmp

$eq\ {}_3\diamond_2\ eq = \{ eq \}$
$eq\ {}_3\diamond_2\ e_{12} = \{ e_{12} \}$
$eq\ {}_3\diamond_2\ ll = \emptyset$
$eq\ {}_3\diamond_2\ sf = \emptyset$
$eq\ {}_3\diamond_2\ e_{23} = \emptyset$
$eq\ {}_3\diamond_2\ sc = \emptyset$
$eq\ {}_3\diamond_2\ e_{13} = \emptyset$
$eq\ {}_3\diamond_2\ sb = \emptyset$
$eq\ {}_3\diamond_2\ rl = \emptyset$

$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ e_{12} \}$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ e_{12} \}$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ e_{12} \}$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ e_{12} \}$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ eq \}$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ e_{12} \}$
$e_{12} \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ e_{12} \}$

$ll \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ ll, sb, rl \}$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ ll \}$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ ll \}$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ ll \}$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ e_{13} \}$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ rl \}$
$ll \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ ll, sf, e_{23}, sc, rl \}$

$sf \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ ll \}$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ sf \}$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ sf \}$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ sf, e_{23}, sc \}$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ e_{13} \}$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ sb \}$
$sf \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ rl \}$

$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ ll \}$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ sf \}$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ e_{23} \}$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ sc \}$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ e_{13} \}$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ sb \}$
$e_{23} \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ rl \}$

$sc \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ ll \}$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ sf, e_{23}, sc \}$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ sc \}$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ sc \}$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ e_{13} \}$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ sb \}$
$sc \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ rl \}$

$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; eq = \{ e_{13} \}$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \{ ll, sf, e_{23}, sc, sb, rl \}$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; ll = \emptyset$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; sf = \emptyset$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \emptyset$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; sc = \emptyset$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \emptyset$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; sb = \emptyset$
$e_{13} \; {}_3\diamond_2 \; rl = \emptyset$

$sb \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ rl \}$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ sb \}$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ sb \}$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ sb \}$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ e_{13} \}$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ sf, e_{23}, sc \}$
$sb \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ ll \}$

$rl \; {}_3\diamond_2 \; eq = \emptyset$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \emptyset$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; ll = \{ ll, sf, e_{23}, sc, rl \}$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; sf = \{ rl \}$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \{ rl \}$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; sc = \{ rl \}$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \{ e_{13} \}$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; sb = \{ ll \}$
$rl \; {}_3\diamond_2 \; rl = \{ ll, sb, rl \}$

.

B.3 Die Komposition ${}_3\diamond_2$ in $\mathfrak{L}$

File stc32ol.tex, created by program compout.pas
vom 16.1.2000

Read from file cmp32ol.kmp

$eq \; {}_3\diamond_2 \; eq = \{ eq \}$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; e_{12} = \{ e_{12} \}$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; tr = \emptyset$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; sf = \emptyset$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; e_{23} = \emptyset$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; sc = \emptyset$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; e_{13} = \emptyset$
$eq \; {}_3\diamond_2 \; sb = \emptyset$

$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; eq = \emptyset$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \emptyset$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; tr = \{e_{12}\}$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; sf = \{e_{12}\}$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \{e_{12}\}$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; sc = \{e_{12}\}$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \{eq\}$
$e_{12} \;{}_3\diamond_2\; sb = \{e_{12}\}$

$tr \;{}_3\diamond_2\; eq = \emptyset$
$tr \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \emptyset$
$tr \;{}_3\diamond_2\; tr = \{tr, sf, e_{23}, sc, sb\}$
$tr \;{}_3\diamond_2\; sf = \{tr\}$
$tr \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \{tr\}$
$tr \;{}_3\diamond_2\; sc = \{tr\}$
$tr \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \{e_{13}\}$
$tr \;{}_3\diamond_2\; sb = \{tr\}$

$sf \;{}_3\diamond_2\; eq = \emptyset$
$sf \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \emptyset$
$sf \;{}_3\diamond_2\; tr = \{tr\}$
$sf \;{}_3\diamond_2\; sf = \{sf\}$
$sf \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \{sf\}$
$sf \;{}_3\diamond_2\; sc = \{sf, e_{23}, sc\}$
$sf \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \{e_{13}\}$
$sf \;{}_3\diamond_2\; sb = \{sb\}$

$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; eq = \emptyset$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \emptyset$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; tr = \{tr\}$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; sf = \{sf\}$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \{e_{23}\}$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; sc = \{sc\}$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \{e_{13}\}$
$e_{23} \;{}_3\diamond_2\; sb = \{sb\}$

$sc \;{}_3\diamond_2\; eq = \emptyset$
$sc \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \emptyset$
$sc \;{}_3\diamond_2\; tr = \{tr\}$
$sc \;{}_3\diamond_2\; sf = \{sf, e_{23}, sc\}$
$sc \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \{sc\}$
$sc \;{}_3\diamond_2\; sc = \{sc\}$
$sc \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \{e_{13}\}$
$sc \;{}_3\diamond_2\; sb = \{sb\}$

$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; eq = \{e_{13}\}$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \{tr, sf, e_{23}, sc, sb\}$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; tr = \emptyset$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; sf = \emptyset$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \emptyset$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; sc = \emptyset$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \emptyset$
$e_{13} \;{}_3\diamond_2\; sb = \emptyset$

$sb \;{}_3\diamond_2\; eq = \emptyset$
$sb \;{}_3\diamond_2\; e_{12} = \emptyset$
$sb \;{}_3\diamond_2\; tr = \{tr\}$
$sb \;{}_3\diamond_2\; sf = \{sb\}$
$sb \;{}_3\diamond_2\; e_{23} = \{sb\}$
$sb \;{}_3\diamond_2\; sc = \{sb\}$
$sb \;{}_3\diamond_2\; e_{13} = \{e_{13}\}$
$sb \;{}_3\diamond_2\; sb = \{sf, e_{23}, sc\}$

.